

DM 17

Bio Spé

Réponses

1. (a)

```
def ps(u,v):  
    return sum(u[k]*v[k] for k in range(len(u)))
```
- (b)

```
def f(u,v,w):  
    scal1=ps(w,u)  
    scal2=ps(w,v)  
    return [scal1*v[k]+scal2*u[k] for k in range(len(u))]
```
2. (a) Comme u et v sont deux vecteurs de norme égale à 1, pour pouvoir être colinéaires ils sont soit égaux soit opposés.
Si $u = v$ alors $f(w) = 2 \langle w|u \rangle u$ et si $v = -u$ alors $f(w) = -2 \langle w|u \rangle u$.
- (b) D'après la question précédente, $\text{Im}(f) \subset \text{vect}(u)$.
Réciproquement, $u = f\left(\pm \frac{1}{2}u\right)$ donc $u \in \text{Im}(f)$ et comme $\text{Im}(f)$ est un espace vectoriel, $\text{vect}(u) \subset \text{Im}(f)$.
Ainsi, $\text{Im}(f) = \text{vect}(u)$. (*Autre méthode, expliquer que $\text{Im}(f)$ est de dimension supérieure ou égale à 1.*)
- (c) u est un vecteur non nul, car de norme 1, et $f(u) = \pm 2u$. Donc u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre ± 2 .
- (d) \mathbb{R}^n étant de dimension finie et f une application linéaire, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \Rightarrow \dim(\text{Ker}(f)) = n - 1.$$

Ainsi, 0 est valeur propre de f et son sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$. La somme des dimensions des sous-espaces propres ne pouvant pas excéder n , il ne reste de place que pour une valeur propre. Il s'agit de ± 2 donc le sous-espace propre est donc de dimension 1.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de f vaut donc $n = \dim(\mathbb{R}^n)$ donc f est diagonalisable.

3. (a) Par définition de f , $\text{Im}(f) \subset \text{vect}(u, v)$.
Soit maintenant $x \in \text{vect}(u, v)$. On sait qu'il existe a et b tels que $x = au + bv$. On cherche $w \in E$ tel que $f(w) = x = au + bv$. On tente de chercher w lui-même comme une combinaison linéaire de u et v . On cherche donc λ et μ tels que $f(\lambda u + \mu v) = au + bv$. Par définition de f cela nous donne :

$$(\lambda \langle u|v \rangle + \mu)u + (\lambda + \mu \langle u|v \rangle)v = au + bv \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \langle u|v \rangle + \mu = a \\ \lambda + \mu \langle u|v \rangle = b \end{cases},$$

car (u, v) est une famille libre.

Le déterminant de ce système est $\langle u|v \rangle^2 - 1$ or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle u|v \rangle \leq \|u\| \|v\|$$

Il n'y a égalité que si u et v sont colinéaires ce qui n'est pas le cas ici.

$$\langle u|v \rangle < 1$$

Cela signifie qu'il existe $w \in E$ (on a en fait montré que $w \in \text{vect}(u, v)$) tel que $f(w) = x$. Le déterminant est non nul, donc ce système admet une unique solution, λ et μ existent bien. Ainsi $\text{vect}(u, v) \subset \text{Im}(f)$ et donc $\text{Im}(f) = \text{vect}(u, v)$.

- (b) u et v n'étant pas colinéaires, (u, v) est une famille libre donc c'est une base de $\text{Im}(f)$ et ainsi $\dim(\text{Im}(f)) = 2$. \mathbb{R}^n étant de dimension finie et f une application linéaire, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \Rightarrow \dim(\text{Ker}(f)) = n - 2.$$

4. (a) Montrons que la famille \mathcal{C} est orthogonale.

u et v étant orthogonaux et les ε_i étant orthogonaux deux à deux, il suffit de montrer que u et v sont orthogonaux à tous les ε_i . Soit $i \in \llbracket 1; n-2 \rrbracket$. On sait que $f(\varepsilon_i) = 0$ donc :

$$\langle \varepsilon_i | u \rangle v + \langle \varepsilon_i | v \rangle u = 0 \Rightarrow \begin{cases} \langle \varepsilon_i | u \rangle = 0 \\ \langle \varepsilon_i | v \rangle = 0 \end{cases},$$

car la famille (u, v) est orthogonale donc libre.

On a donc bien montré que la famille \mathcal{C} est orthogonale. Elle est aussi formée de vecteurs tous de norme 1.

Il s'agit d'une famille libre de n vecteurs de \mathbb{R}^n qui est de dimension n , donc c'est une base de \mathbb{R}^n .

\mathcal{C} est une base orthonormée de \mathbb{R}^n .

- (b) On a $f(u) = v$ et $f(v) = u$, et pour tout $i \in \llbracket 1; n-2 \rrbracket$, $f(\varepsilon_i) = 0$.

$$\text{Donc } \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ est symétrique et à coefficients réels donc cette matrice est diagonalisable et ainsi f est diagonalisable.

5. (a) Montrons que la famille \mathcal{D} est libre. On cherche tous les réels $\lambda, \mu, a_1, \dots, a_{n-2}$ tels que :

$$\lambda u + \mu v + a_1 w_1 + \dots + a_{n-2} w_{n-2} = 0.$$

En appliquant la fonction f on obtient que $(\lambda \langle u | v \rangle + \mu)u + (\lambda + \mu \langle u | v \rangle)v = 0$.

Les vecteurs u et v n'étant pas colinéaires, (u, v) est une famille libre et on en déduit que

$$(S') \begin{cases} \lambda \langle u | v \rangle + \mu = 0 \\ \lambda + \mu \langle u | v \rangle = 0 \end{cases}.$$

Le déterminant de ce système est $\langle u | v \rangle^2 - 1$ qui est non nul car u et v ne sont pas colinéaires (déjà démontré précédemment).

Ainsi (S') équivaut à $\lambda = \mu = 0$.

On a donc montré que

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v + a_1 w_1 + \dots + a_{n-2} w_{n-2} = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \mu = 0 \\ a_1 w_1 + \dots + a_{n-2} w_{n-2} = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \mu = 0 \\ a_1 = \dots = a_{n-2} = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

car la famille (w_1, \dots, w_{n-2}) est libre.

La réciproque étant évidemment vraie, on a bien montré que \mathcal{D} est une famille libre.

De plus $\text{card}(\mathcal{D}) = \dim(E)$ donc \mathcal{D} est une base de E .

- (b) On a $f(u) = \langle u | v \rangle u + v$ et $f(v) = u + \langle u | v \rangle v$, et pour tout $i \in \llbracket 1; n-2 \rrbracket$, $f(w_i) = 0$.

$$\text{Donc } \text{Mat}_{\mathcal{D}}(f) = \begin{pmatrix} \langle u | v \rangle & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \langle u | v \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) $\text{Mat}_{\mathcal{D}}(f)$ est symétrique à coefficients réels donc cette matrice est diagonalisable et ainsi f est diagonalisable.