DM 17 Sujet Oral

Bio Spé

à rendre le 23 mars 2026

On note $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel noté $< \cdot | \cdot >$ et de sa norme associée $|| \cdot ||$.

Soient u et v deux vecteurs **de norme 1**. On définit l'endomorphisme de E par :

$$f(w) = < w|u > v + < w|v > u.$$

1. (a) Écrire une fonction Python `ps(u,v)` qui prend en argument deux vecteurs `u` et `v` sous forme de listes et renvoie la valeur du produit scalaire $< u|v >$.
   (b) Écrire une fonction Python `f(u,v,w)` qui prend en argument trois vecteurs sous forme de le listes et renvoie le vecteur $f(w)$ sous forme de liste aussi.
2. On suppose **uniquement dans cette question** que u et v sont colinéaires.
   (a) Montrer que, pour tout $w \in E$, on a $f(w) = \pm 2 < w|u > u$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(u)$.
   (c) Montrer que u est un vecteur propre de f et déterminer sa valeur propre associée.
   (d) En déduire que f est diagonalisable.
3. À partir de maintenant, les vecteurs u et v seront non colinéaires.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(u, v)$.
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. On suppose **uniquement dans cette question** que u et v sont orthogonaux.
   (a) Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2})$ une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(f)$.
   Montrer que $\mathscr{C} = (u, v, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2})$ est une base orthonormée de E.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$.
   (c) En déduire que f est diagonalisable.
5. On revient au cas général (u et v sont non colinéaires mais pas nécessairement orthogonaux).
   (a) Soit $(w_1, \dots, w_{n-2})$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   Montrer que $\mathscr{D} = (u, v, w_1, \dots, w_{n-2})$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{D}$.
   (c) En déduire que f est diagonalisable.