

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

Exercice 1

1. (a) Soit x un réel. Comme $U(\Omega) = \{-1, 1\}$, $([U = -1], [U = 1])$ forme un système complet d'événements, en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) &= P([U = -1] \cap [UX \leq x]) + P([U = 1] \cap [UX \leq x]) \\ &= P([U = -1] \cap [-X \leq x]) + P([U = 1] \cap [+X \leq x]) = P([U = -1] \cap [X \leq -x]) + P([U = 1] \cap [X \leq x]) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel, } P(Y \leq x) = P([U = -1] \cap [X \leq -x]) + P([U = 1] \cap [X \leq x])}$$

- (b) En notant Φ la fonction de répartition de X . Pour x réel :

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) &= P([U = -1] \cap [X \leq -x]) + P([U = 1] \cap [X \leq x]) \\ &= P(U = -1)P(X \leq -x) + P(U = 1)P(X \leq x) && \text{indépendance de } U \text{ et } X \\ &= \frac{1}{2}P(X \leq x) + \frac{1}{2}P(X \leq -x) && \text{loi de } U \\ &= \frac{1}{2}(\Phi(x) + 1 - \Phi(-x)) && \text{variable à densité} \\ &= \frac{1}{2}(\Phi(x) + 1 - (1 - \Phi(x))) && \text{cours } \Phi(x) + \Phi(-x) = 1 \\ &= \Phi(x) \end{aligned}$$

X et Y ont donc la même fonction de répartition donc suivent la même loi.

$$\boxed{Y \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0, 1).}$$

2. U prend un nombre fini de valeurs, donc admet une espérance :

$$E(U) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$\boxed{E(U) = 0.}$$

- (a) Comme X admet une variance, elle admet un moment d'ordre 2 (formule de König-Huygens) et donc X^2 admet une espérance.

On remarque que $XY = UXX = UX^2$ et en utilisant le lemme des coalitions U et X^2 sont indépendantes, donc UX^2 admet une espérance :

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(UX^2) \\ &= E(U)E(X^2) \\ &= 0E(X^2) \end{aligned}$$

$$\boxed{E(XY) = 0.}$$

- (b) Comme $E(XY)$, $E(X)$ et $E(Y)$ existent, on peut appliquer la formule de König-Huygens

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - \times 0$$

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) = 0.}$$

3. (a) Comme X admet une variance, la formule de König-Huygens permet de montrer que

$$E(X^2) = V(X) + E(X)^2$$

comme X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

$$\boxed{E(X^2) = 1.}$$

La fonction $x \mapsto x^2$ étant continue sur \mathbb{R} et $E(X^2)$ existe, on peut donc appliquer le théorème de transfert :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \text{ converge et vaut } E(X^2) = 1$$

Comme l'intégrande est une fonction paire

$$\int_0^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \text{ converge et vaut } \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.}$$

(b) On pose pour x réel

$$\begin{aligned} u(x) &= x^3 & u'(x) &= 3x^2 \\ v(x) &= -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) & v'(x) &= x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Pour $A \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \int_0^A x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx &= \int_0^A u(x)v'(x) dx \\ &= [u(x)v(x)]_0^A - \int_0^A u'(x)v(x) dx \\ &= \left[-x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^A + 3 \int_0^A x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } A \in \mathbb{R}^+, \int_0^A x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = -A^3 \exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) + 3 \int_0^A x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.}$$

(c) En utilisant le théorème des croissances comparées

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} A^3 \exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) = 0$$

Comme $\int_0^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ converge, en passant à la limite dans l'égalité précédente :

$\int_0^{+\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ converge et vaut $3 \int_0^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ En utilisant le résultat de la question 3(a) :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \text{ converge et vaut } \frac{3\sqrt{2\pi}}{2}.}$$

- (d) Par parité de la fonction $x \mapsto x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ converge et vaut $2 \int_0^{+\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 3\sqrt{2\pi}$
 donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$, converge et vaut 3 et la convergence se confond avec la convergence absolue. En utilisant le théorème de transfert avec la fonction continue sur \mathbb{R} , $x \mapsto x^4$

$$E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 3$$

X possède un moment d'ordre 4 et $E(X^4) = 3$.

4. (a) $X^2 Y^2 = X^2 U^2 X^2 = X^4$ car $U(\Omega) = \{-1, 1\}$. Donc

$X^2 Y^2$ possède une espérance et $E(X^2 Y^2) = 3$.

- (b) Comme X^2 , Y^2 et $X^2 Y^2$ admettent des espérances, on peut utiliser la formule de König-Huygens, $\text{Cov}(X^2, Y^2)$ existe et

$$\text{Cov}(X^2, Y^2) = E(X^2 Y^2) - E(X^2)E(Y^2)$$

Comme X et Y suivent la même loi, elles ont le même moment d'ordre 2, donc $E(X^2) = E(Y^2) = 1$

$\text{Cov}(X^2, Y^2) = 8$.

- (c) Si X^2 et Y^2 étaient indépendantes leur covariance serait nulle.

X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes.

Si X et Y étaient indépendantes alors en utilisant le lemme des coalitions X^2 et Y^2 le seraient ce qui n'est pas le cas :

X et Y ne sont pas indépendantes.

- (d) L'énoncé rappelle que deux variables aléatoires indépendantes ont une covariance nulle. Nous venons de prouver que la réciproque est fautive, il existe X et Y de covariance nulle et non indépendantes.

Exercice 2

Partie A

1. On tire une boule de façon honnête donc

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; N \rrbracket)$.

2. La commande `ajout(L, x)` modifie la liste `L` en rajoutant l'élément `x` si et seulement si celui-ci n'est pas présent dans la liste.
 3.

```

1 import numpy.random as rd
2 def Simul_T(N,i):
3     L = []
4     k = 0
5     while len(L) < i:
6         x = rd.randint(1,N+1)
7         ajout(L,x)
8         k = k+1
9     return( k )
```

4.

```
1 S=0
2 for i in range(100):
3     S+=Simul_T(3,2)
4 print(S/100)
```

Le résultat affiché donne une estimation de $E(T_2)$ lorsque $N = 3$.

Partie B

5. On peut obtenir le deuxième numéro au deuxième lancer, au troisième ...

Les valeurs prises par T_2 sont dans $\llbracket 2; +\infty \llbracket$.

6. (a) Par description de l'expérience on a

$$[T_2 = k] \cap [X_1 = 1] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] \cap \dots \cap [X_{k-1} = 1] \cap [X_k \neq 1],$$

car $[T_2 = k]$ signifie que les $k - 1$ premiers tirage ont donné le même numéro.

(b) Les tirages étant réalisés avec remise, ils sont indépendants donc

$$\begin{aligned} P([T_2 = k] \cap [X_1 = 1]) &= P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \times \dots \times P(X_{k-1} = 1) \times P(X_k \neq 1) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$P([T_2 = k] \cap [X_1 = 1]) = \frac{2}{3^k}.$$

(c) Le raisonnement précédent a été fait avec l'événement $[X_1 = 1]$ mais il est en fait valable avec $[X_1 = 2]$ et $[X_1 = 3]$. Or $([X_1 = 1], [X_1 = 2], [X_1 = 3])$ est un système complet d'événement donc, d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} \forall k \geq 2, \quad P(T_2 = k) &= P([T_2 = k] \cap [X_1 = 1]) + P([T_2 = k] \cap [X_1 = 2]) + P([T_2 = k] \cap [X_1 = 3]) \\ &= 3P([T_2 = k] \cap [X_1 = 1]) = \frac{2}{3^{k-1}}. \end{aligned}$$

$$P(T_2 = k) = \frac{2}{3^{k-1}}.$$

7. T_2 est une variable aléatoire réelle discrète à valeurs positives donc T_2 admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{k \geq 2} kP(T_2 = k)$ est convergente.

Sous réserve de convergence

$$\begin{aligned} E(T_2) &= \sum_{k=2}^{+\infty} kP(T_2 = k) \\ &= 2 \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

On reconnaît ici une somme de série dérivée de la série géométrique que l'on sait être convergente car $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$.

Donc T_2 admet une espérance et

$$E(T_2) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - 2 = 2 \times \frac{1}{(1-1/3)^2} - 2 = \frac{5}{2}.$$

T_2 admet une espérance et $E(T_2) = \frac{5}{2}$.

8. On a $Z_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(Z_2 = n) = P(T_2 = n + 1) = \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Z_2 suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

On sait donc que $E(Z_2) = \frac{3}{2}$. Or, par linéarité de l'espérance $E(T_2) = E(Z_2) + 1$ donc $E(T_2) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$.

On sait aussi que $V(Z_2) = \frac{1/3}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}$ et par propriété de la variance $V(T_2) = V(Z_2) = \frac{3}{4}$.

Partie C

9. (a) Z_i désigne le rang d'apparition pour la première fois de l'événement « obtenir un numéro différent des $i - 1$ numéros déjà obtenus au cours des T_{i-1} premiers tirages », qui est de probabilité $\frac{N - (i - 1)}{N}$, au cours d'une succession de tirages qui débutent au tirage numéro $T_{i-1} + 1$ et qui sont indépendants.

Z_i suit donc une loi géométrique de paramètres $\frac{N - i + 1}{N}$.

(b) $E(Z_i) = \frac{1}{\frac{N-i+1}{N}} = \frac{N}{N-i+1}$ et $V(Z_i) = \frac{1 - \frac{N-i+1}{N}}{\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^2} = \frac{N(i-1)}{(N-i+1)^2}$.

On a $Z_1 = 1$ donc $E(Z_1) = 1$ et $V(Z_1) = 0$. De plus $\frac{N}{N-1+1} = 1$ et $\frac{N(1-1)}{(N-1+1)^2} = 0$.

Les formules restent vraies pour $i = 1$.

10. On a

$$\sum_{k=1}^i Z_k = Z_1 + \sum_{k=2}^i (T_k - T_{k-1}) = 1 + T_i - T_1 = 1 + T_i - 1 = T_i.$$

$$T_i = \sum_{k=1}^i Z_k.$$

11. (a) On sait (admis dans l'énoncé) que Z_2 et Z_3 sont indépendantes. Donc pour tous ℓ et k dans \mathbb{N}^*

$$P([Z_2 = \ell] \cap [Z_3 = k]) = P(Z_2 = \ell) \times P(Z_3 = k) = \frac{N-1}{N} \times \left(\frac{1}{N}\right)^{\ell-1} \times \frac{N-2}{N} \left(\frac{2}{N}\right)^{k-1}.$$

Pour tous ℓ et k dans \mathbb{N}^* , $P([Z_2 = \ell] \cap [Z_3 = k]) = \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \left(\frac{1}{N}\right)^{\ell-1} \left(\frac{2}{N}\right)^{k-1}$.

(b) Pour tout $n \geq 2$, on a $[Z_2 + Z_3 = n] = \bigcup_{k=1}^{n-1} [Z_2 = k] \cap [Z_3 = n - k]$. Donc

$$\begin{aligned} P(Z_2 + Z_3 = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P([Z_2 = k] \cap [Z_3 = n - k]) && \text{union d'évts disjoints} \\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \left(\frac{2}{N}\right)^{n-k-1} && \text{question précédente} \\ &= \frac{2^{n-1}(N-1)(N-2)}{N^n} \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} \\ &= \frac{2^{n-1}(N-1)(N-2)}{N^n} \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} && \text{car } \frac{1}{2} \neq 1 \\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n} \right). \end{aligned}$$

$$P(Z_2 + Z_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N} \right)^n - \frac{2}{N^n} \right).$$

- (c) On a $T_3(\Omega) = \llbracket 3; +\infty \llbracket$. D'après la question 10. $T_3 = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1 + Z_2 + Z_3$.
Pour tout $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} P(T_3 = n) &= P(1 + Z_2 + Z_3 = n) \\ &= P(Z_2 + Z_3 = n - 1) \\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N} \right)^{n-1} - \frac{2}{N^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

$$T_3(\Omega) = \llbracket 3; +\infty \llbracket \text{ et pour tout } n \in T_3(\Omega), P(T_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N} \right)^{n-1} - \frac{2}{N^{n-1}} \right).$$

12. Soit $i \in \llbracket 1; N \llbracket$. On a

$$\begin{aligned} E(T_i) &= E\left(\sum_{k=1}^i Z_k\right) && \text{question 10} \\ &= \sum_{k=1}^i E(Z_k) && \text{linéarité de l'espérance} \\ &= \sum_{k=1}^i \frac{N}{N-k+1} && \text{question 9.b)} \\ &= N \sum_{j=N-i+1}^N \frac{1}{j} && j = N - k + 1 \end{aligned}$$

$$E(T_i) = N \sum_{j=N-i+1}^N \frac{1}{j}.$$

13. Soient i et j tels que $1 \leq i \leq j \leq N$.

$$\begin{aligned} \text{cov}(T_i, T_j) &= \text{cov}\left(\sum_{k=1}^i Z_k, \sum_{\ell=1}^j Z_\ell\right) \\ &= \sum_{k=1}^i \sum_{\ell=1}^j \text{cov}(Z_k, Z_\ell) && \text{covariance bilinéaire} \\ &= \sum_{k=1}^i \text{cov}(Z_k, Z_k) && Z_k \text{ VAR indépendantes donc } \text{cov}(Z_k, Z_\ell) = 0 \text{ si } k \neq \ell \\ &= \sum_{k=1}^i V(Z_k) \\ &= V\left(\sum_{k=1}^i Z_k\right) && Z_k \text{ VAR indépendantes} \\ &= V(T_i) \end{aligned}$$

Pour tous i et j tels que $1 \leq i \leq j \leq N$, $\text{cov}(T_i, T_j) = V(T_i)$.

Exercice 3

Partie A : Quelques exemples

- La matrice A n'est pas symétrique donc $A \notin S_2^2(\mathbb{R})$.
Les trois autres matrices sont bien symétriques. Déterminons leurs valeurs propres.

On sait que $\lambda \in \text{sp}(B) \iff \det(B - \lambda I_2) = 0$. Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\det(B - \lambda I_2) = (-\lambda) \times (-\lambda) - (-1) \times (-1) = \lambda^2 - 1.$$

Donc $\det(B - \lambda I_2) = 0 \iff \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. B admet une valeur propre strictement négative donc $B \notin S_2^+(\mathbb{R})$.

De même, $\det(C - \lambda I_2) = \lambda^2 - 2\lambda$ donc $\text{sp}(C) = \{0; 2\} \subset \mathbb{R}^+$. Donc $C \in S_2^+(\mathbb{R})$.

Et enfin, $\det(D - \lambda I_2) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$ donc $\text{sp}(D) = \{1; 5\} \subset \mathbb{R}^+$. Donc $D \in S_2^+(\mathbb{R})$.

$$\boxed{A \notin S_2^+(\mathbb{R}), B \notin S_2^+(\mathbb{R}), C \in S_2^+(\mathbb{R}), D \in S_2^+(\mathbb{R}).}$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{vect}(I_3, N) \quad \text{avec } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

\mathcal{M} est le sous-espace engendré par (I_3, N) .

La famille (I_3, N) est libre car formée de deux matrices visiblement non proportionnelles.

Ainsi, (I_3, N) est une base de \mathcal{M} et donc $\dim(\mathcal{M}) = \text{card}(I_3, N) = 2$.

(b) Il s'agit dans cette question de déterminer une base de vecteurs propres de $M(a, b)$ par une méthode peu habituelle.

En suivant les consignes, on cherche $y \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M(a, b) \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. (La matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est jamais nulle.)

On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} M(a, b) \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + by = \lambda \\ 2b + ay = \lambda y \\ a + by = \lambda \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = a + by \\ 2b + ay = (a + by)y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = a + by \\ by^2 = 2b \end{cases} \end{aligned}$$

Si $b \neq 0$, on obtient que $y = \pm\sqrt{2}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est alors un vecteur propre de $M(a, b)$ associé à la valeur propre $a + b\sqrt{2}$ et le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M(a, b)$ associé à la valeur propre $a - b\sqrt{2}$.

Si $b = 0$, quelle que soit la valeur de y , le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M(a, 0)$ associé à la valeur propre a , donc on remarque que ce qu'on a affirmé pour $b \neq 0$ fonctionne encore.

On remarque ensuite que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs précédents, il est non nul et il vérifie

$$M(a, b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M(a, b)$ associé à la valeur propre a .

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sont des vecteurs propres de } M(a, b).$$

(c) La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de vecteurs propres de $M(a, b)$ (famille orthogonale donc libre de 3 vecteurs).

Pour avoir une matrice P qui vérifie $P^T = P^{-1}$ il nous faut une base orthonormée de vecteurs propres.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de $M(a, b)$.

On a donc $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$ et $P^{-1} = P^T$ avec

$$D(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a + b\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } \boxed{P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}.$$

(d) $M(a, b)$ est toujours une matrice symétrique à coefficients réels.

On a $\text{sp}(M(a, b)) = \{a, a + b\sqrt{2}, a - b\sqrt{2}\}$.

Donc

$$\text{sp}(M(a, b)) \subset \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a + b\sqrt{2} \geq 0 \\ a - b\sqrt{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq -\frac{a}{\sqrt{2}} \\ b \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

$$\boxed{M(a, b) \in S_2^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a \geq 0 \text{ et } |b| \leq \frac{a}{\sqrt{2}}.}$$

Partie B : Matrice de Gram

3. (a) \Rightarrow Supposons que $x \in E^\perp$. Alors, pour tout $u \in E$, $(x | u) = 0$.

En particulier, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $e_i \in E$ donc $(x | e_i) = 0$.

\Leftarrow Supposons que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $(x | e_i) = 0$.

Soit u un vecteur quelconque de E . Comme (e_1, \dots, e_n) est une famille génératrice de E , il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$

tels que $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. On a alors

$$\begin{aligned} (x | u) &= \left(x \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (x | e_i) && \text{bilinearité du produit scalaire} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \times 0 && \text{hypothèse} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $x \in E^\perp$.

$$\boxed{\text{On a bien montré que } x \in E^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, (x | e_i) = 0.}$$

(b) Par définition du noyau d'une matrice :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}(G) &\Leftrightarrow G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{j=1}^n (e_i | e_j) x_j = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, (e_i | \sum_{j=1}^n x_j e_j) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n x_j e_j \in E^\perp \end{aligned}$$

question précédente.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}(G) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n x_j e_j \in E^\perp.}$$

(c) \Rightarrow Supposons que (e_1, \dots, e_n) est libre. C'est alors une base de E et donc E est de dimension n . Mais $E \subset \mathbb{R}^n$ et \mathbb{R}^n est de dimension n .

Donc, dans ce cas, $E = \mathbb{R}^n$ et ainsi $E^\perp = \{0\}$.

D'après la question précédente, on a donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}(G) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n x_j e_j = 0,$$

mais comme la famille (e_1, \dots, e_n) est libre on a

$$\sum_{j=1}^n x_j e_j = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Au final, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}(G) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$, ce qui signifie que $\text{Ker}(G) = \{0\}$ et donc que G est inversible.

\Leftarrow Supposons que G est inversible. Alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_j e_j = 0 &\Rightarrow \sum_{j=1}^n x_j e_j \in E^\perp && \text{car } 0 \in E^\perp \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}(G) && \text{question précédente} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 && \text{car } G \text{ inversible} \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0. \end{aligned}$$

Donc (e_1, \dots, e_n) est libre.

(e_1, \dots, e_n) est libre si, et seulement si, G est inversible.

4. (a) On a vu dans la question 3.b) que $GX = \begin{pmatrix} (e_1 | \sum_{j=1}^n x_j e_j) \\ \vdots \\ (e_n | \sum_{j=1}^n x_j e_j) \end{pmatrix}$.

On a donc $X^T GX = \sum_{i=1}^n x_i (e_i | \sum_{j=1}^n x_j e_j) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \mid \sum_{j=1}^n x_j e_j \right)$

$X^T GX = (x' \mid x')$ avec $x' = \sum_{j=1}^n x_j e_j$.

(b) On a vu dans la question précédente que $X^T GX = \|x'\|^2$.

Mais comme X est un vecteur propre de G associé à λ , on a aussi

$$X^T GX = X^T \times (\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

On en déduit que $\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x'\|^2$ et donc $\lambda = \frac{\|x'\|^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, car $\sum_{i=1}^n x_i^2 \neq 0$ car $X \neq 0$ (vecteur propre!!).

Par quotient de réels positifs (dénominateur non nul), on obtient que $\lambda \geq 0$.

G est donc une matrice symétrique réelle donc le spectre est inclus dans \mathbb{R}^+ , c'est-à-dire $G \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Partie C : Matrice de covariance

5. Nous allons ici redémontrer une propriété de cours.

(a) Pour tout $(i, j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^3$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_i, X_j + xX_k) &= E(X_i(X_j + xX_k)) - E(X_i)E(X_j + xX_k) \\ &= E(X_iX_j) + xE(X_iX_k) - E(X_i)E(X_j) - xE(X_i)E(X_k) && \text{linéarité de l'espérance} \\ &= E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) + x(E(X_iX_k) - E(X_i)E(X_k)) \\ &= \text{cov}(X_i, X_j) + x\text{cov}(X_i, X_k). \end{aligned}$$

Pour tout $(i, j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^3$ et $x \in \mathbb{R}$, $\text{cov}(X_i, X_j + xX_k) = \text{cov}(X_i, X_j) + x\text{cov}(X_i, X_k)$.

(b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{P}(n) : \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \text{cov} \left(X_i, \sum_{j=1}^n x_j X_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j \text{cov}(X_i, X_j).$$

Pour $n = 1$: D'après la question précédente appliquée avec $X_j = 0$, $k = i = 1$ et $x = x_1$, on a

$$\text{cov}(X_1, x_1 X_1) = x_1 \text{cov}(X_1, X_1).$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On pose $Y = \sum_{j=1}^n x_j X_j$. On a alors pour tout $i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} \operatorname{cov} \left(X_i, \sum_{j=1}^{n+1} x_j X_j \right) &= \operatorname{cov}(X_i, Y + x_{n+1} X_{n+1}) \\ &= \operatorname{cov}(X_i, Y) + x_{n+1} \operatorname{cov}(X_i, X_{n+1}) && \text{question précédente} \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \operatorname{cov}(X_i, X_j) + x_{n+1} \operatorname{cov}(X_i, X_{n+1}) && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} x_j \operatorname{cov}(X_i, X_j). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \operatorname{cov} \left(X_i, \sum_{j=1}^n x_j X_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j \operatorname{cov}(X_i, X_j).$$

6. (a) $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket, \operatorname{cov}(X_i, X_j) = \operatorname{cov}(X_j, X_i) \in \mathbb{R}$.

Donc Σ est une matrice symétrique réelle.

(b) Soit $\lambda \in \operatorname{sp}(\Sigma)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à cette valeur propre.

La covariance vérifiant la même propriété de bilinéarité que le produit scalaire, on a

$$X^T \Sigma X = \operatorname{cov} \left(\sum_{i=1}^n x_i X_i, \sum_{i=1}^n x_i X_i \right) = V \left(\sum_{i=1}^n x_i X_i \right).$$

De plus, on a aussi $X^T \Sigma X = \lambda X^T X = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Comme X est non nul, on a $\sum_{i=1}^n x_i^2 \neq 0$ et donc $\lambda = \frac{V(\sum_{i=1}^n x_i X_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \geq 0$ car une variance est positive.

Les valeurs propres de Σ sont donc positives et Σ est une matrice symétrique réelle donc $\Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})$.