Devoir surveillé n° 6

28 mars 2026

Durée de l'épreuve : 3h30

Le devoir comporte trois exercices.
*La calculatrice n'est pas autorisée. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Les résultats seront soulignés ou encadrés **à l'aide d'une règle**.*

Exercice 1

On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\operatorname{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1) E(Z_2)$$

On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.

On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathscr{N}(0,1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(Y \leqslant x) = P([U=1] \cap [X \leqslant x]) + P([U=-1] \cap [X \geqslant -x]).$$
   (b) En déduire que Y suit la même loi que X.
2. (a) Calculer l'espérance de U puis montrer que $E(XY) = 0$.
   (b) En déduire que $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.
3. (a) Rappeler la valeur de $E\left(X^2\right)$ et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$
   (b) Montrer, grâce à une intégration par parties que
$$\forall A \in \mathbb{R}^+ : \quad \int_0^A x^4 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = -A^3 \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$
   (c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.
   (d) Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $E\left(X^4\right) = 3$
4. (a) Vérifier que $E\left(X^2 Y^2\right) = 3$
   (b) Déterminer $\operatorname{Cov}\left(X^2, Y^2\right)$
   (c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.
   (d) Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables discrètes est encore valable pour les variables à densité. Lequel ?

Exercice 2

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.

Pour tout entier $i \in [\![1; N]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois i numéros distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages, mais seulement $i-1$ numéros distincts lors des $k-1$ premiers tirages.

Exemple : on suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1, T_2 = 2$, $T_3 = 5$ et $T_4 = 8$.

Partie A : Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_k.
2. Le programme en langage Python ci-dessous définit une fonction « `ajout` » qui prend en argument une liste L et un entier x.

```python
def ajout(L,x):
    if (x in L) == False :
        L.append(x)
```

   Expliquez succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande `ajout(L,x)` modifie la liste `L`.
3. Recopier et compléter la fonction Python `Simul_T` ci-dessous.
   Cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1; N]\!]$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i. Dans le script nous notons :
   - `L` la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués ;
   - `k` le rang du tirage en cours ;
   - `x` le résultat du tirage en cours.

```python
import random as rd
def Simul_T(N,i):
    L = []
    k = 0
    while ... :
        x = rd.randint(1,N)
        ajout(L,x)
        k = ...
    return(...)
```

4. On suppose $N = 3$.
   Rédiger un programme Python qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de `Simul_T(3,2)`. Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

Partie B : Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie on suppose $N = 3$, ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3 .

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.
6. Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé.
   (a) Décrire l'évènement $(\ T_2 = k\ ) \cap (X_1 = 1)$ à l'aide des évènements $(\ X_j = 1\ )$ et $(\ X_j \neq 1\ )$ avec $j \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire $P\left((T_2 = k) \cap (X_1 = 1)\right)$.
   (c) Montrer que $P\left(T_2 = k\right) = \dfrac{2}{3^{k-1}}$.
7. Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer.
8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$.
   Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Partie C : Quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N. Pour tout $i \in [\![1; N]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1 \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geqslant 2 \end{cases}$$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires, après le T_{i-1}-ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i - 1$ numéros déjà tirés.
On admet que les variable aléatoires $Z_1, \ldots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

9. Soit $i \in [\![2; N]\!]$.
   (a) Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{N - i + 1}{N}$.
   (b) Exprimer $E\left(Z_i\right)$ et $V\left(Z_i\right)$ en fonction de i et N. Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$.
10. Soit $i \in [\![1; N]\!]$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \ldots, Z_i$.

Loi de T_3

11. (a) Calculer $P\left((Z_2=\ell)\cap(Z_3=k)\right)$ pour tous ℓ et k dans $\mathbb{N}^*$.

    (b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$P\left(Z_2+Z_3=n\right)=\frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^n-\frac{2}{N^n}\right)$$

    (c) Déterminer la loi de T_3

Espérance et covariance

12. Soit $i \in [\![1;\, N]\!]$, montrer que $E\left(T_i\right)=N\displaystyle\sum_{k=N-i+1}^{N}\frac{1}{k}$.

13. Soient i et j deux entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N$, montrer que

$$\operatorname{Cov}\left(T_i, T_j\right)=V\left(T_i\right),$$

où $\operatorname{Cov}\left(T_i, T_j\right)$ désigne la covariance de T_i et T_j.

Exercice 3

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on rappelle que si $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ alors leur produit scalaire canonique noté $(\ x \mid y\ )$ est défini par :

$$(x \mid y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On confondra les réels et les matrices carrées de $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$.
Si A est une matrice, sa transposée est notée $A^\top$.
Si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, son orthogonal est noté $E^\perp$.
On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$, autrement dit :

$$S_n^+(\mathbb{R})=\left\{A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\quad A^\top=A \text{ et } \operatorname{sp}(A)\subset\mathbb{R}_+\right\}.$$

L'objectif de ce problème est de démontrer l'appartenance à $S_n^+(\mathbb{R})$ de certaines matrices.
La partie A est consacrée à l'étude d'exemples en petites dimensions. Dans la partie B , on fait le lien avec la notion de produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, et dans la partie C (BONUS), on fait le lien avec la notion de covariance. Ces deux dernières parties ne sont pas indépendantes.

Partie A : Quelques exemples

1. Préciser, en justifiant, parmi les matrices ci-dessous lesquelles appartiennent à $S_2^+(\mathbb{R})$:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 4\end{pmatrix}.$$

2. On se place dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble $\mathscr{M}$ des matrices $M(a,b)$ qui s'écrivent comme ci-dessous :

$$\mathscr{M}=\left\{M(a,b),\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}\qquad \text{où } M(a,b)=\begin{pmatrix}a & b & 0\\ b & a & b\\ 0 & b & a\end{pmatrix}.$$

    (a) Montrer que $\mathscr{M}$ est un sous-espace vectoriel engendré par une famille judicieusement choisie. Justifier que cette famille est libre et en déduire la dimension de $\mathscr{M}$.

    (b) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Déterminer deux vecteurs propres de $M(a,b)$ sous la forme $\begin{pmatrix}1\\ y\\ 1\end{pmatrix}$ (avec $y\in\mathbb{R}$) puis un troisième vecteur propre orthogonal aux deux précédents.

    (c) En déduire un réel $r \geqslant 0$ et une matrice P inversible telle que $P^\top=P^{-1}$ et :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad M(a,b)=P\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a+br & 0\\ 0 & 0 & a-br\end{pmatrix}P^\top.$$

    (d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple portant sur a et b pour que $M(a,b)$ appartienne à $S_3^+(\mathbb{R})$.

Partie B : Matrice de Gram

Soit une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $E = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ et on appelle matrice de Gram de cette famille la matrice G définie par :

$$G = \begin{pmatrix} (e_1 \mid e_1) & (e_1 \mid e_2) & \ldots & (e_1 \mid e_n) \\ (e_2 \mid e_1) & (e_2 \mid e_2) & \ldots & (e_2 \mid e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_n \mid e_1) & (e_n \mid e_2) & \ldots & (e_n \mid e_n) \end{pmatrix}.$$

3. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x \in E^\perp \Leftrightarrow (\forall i \in [\![1;\, n]\!], \quad (x \mid e_i) = 0).$$

   (b) En déduire que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(G) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E^\perp.$$

   (c) En déduire enfin que la famille ($e_1, \ldots, e_n$) est libre si et seulement si G est une matrice inversible.

4. Dans cette question, on cherche à prouver que $G \in S_n^+(\mathbb{R})$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   (a) Calculer le produit matriciel GX et démontrer que $X^\top GX = (x' \mid x')$ où x' est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ à préciser.

   (b) Soit $\lambda \in \operatorname{sp}(G)$ et X un vecteur propre de G associé à cette valeur propre. En calculant de deux façons $X^\top GX$, démontrer que $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et conclure.

FIN DU SUJET

Partie C (BONUS) : Matrice de covariance

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ n variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ telles que pour tout $(i,j) \in [\![1;\, n]\!]^2$, la covariance de X_i et X_j, notée $\operatorname{Cov}(X_i, X_j)$, existe. On rappelle que cette covariance vérifie :

$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \operatorname{E}(X_i X_j) - \operatorname{E}(X_i)\operatorname{E}(X_j).$$

On appelle matrice de covariance de $(X_1, \ldots, X_n)$ la matrice Σ définie par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \operatorname{Cov}(X_1, X_1) & \operatorname{Cov}(X_1, X_2) & \ldots & \operatorname{Cov}(X_1, X_n) \\ \operatorname{Cov}(X_2, X_1) & \operatorname{Cov}(X_2, X_2) & \ldots & \operatorname{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \operatorname{Cov}(X_n, X_1) & \operatorname{Cov}(X_n, X_2) & \ldots & \operatorname{Cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}.$$

5. (a) En utilisant uniquement la définition donnée en début de partie C démontrer que :

$$\forall (i,j,k) \in [\![1;\, n]\!]^3, \forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Cov}(X_i, X_j + xX_k) = \operatorname{Cov}(X_i, X_j) + x \operatorname{Cov}(X_i, X_k)$$

   (b) En déduire que (on attend une récurrence) :

$$\forall i \in [\![1;\, n]\!], \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \operatorname{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^{n} x_j X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

6. (a) Justifier que Σ est une matrice symétrique réelle.

   (b) En s'inspirant de la question 4 de la partie précédente, démontrer que $\Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})$.