PRÉPARATIONS AUX ÉPREUVES ORALES

SUJET 1 : AGRO 2025

Question de cours

Donner la définition de fonction de densité de probabilité.

Exercice préparé

1. (a) Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x}$.
Étudier la fonction f sur son ensemble de définition et dresser un tableau de variations complet.
En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.
   (b) Déterminer les solutions exactes de l'équation $f(x) = 1$.

Soit A_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et tels que les autres coefficients situés sur la colonne j sont égaux à j pour $j \in [\![1, n]\!]$.

2. (a) Écrire une fonction Python d'argument n renvoyant A_n.
   (b) En déduire une valeur approchée des valeurs propres de A_n pour $n \in \{2, 3, 4, 10\}$.
3. Pour $n \geqslant 2$, On pose :
$$f_n : t \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+t}$$
et on considère l'équation E_n d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1$$
   (a) Montrer que l'équation E_n admet une unique solution dans chacun des intervalles $]-1; +\infty[$ et $]-k; -(k-1)[$, pour $k \in [\![2, n]\!]$.
   (b) On admet (pour l'instant) que toutes les valeurs propres de A_n sont les solutions de l'équation E_n.
La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
4. Pour $n \geqslant 2$, on appelle λ_n la solution de E_n comprise entre -2 et -1 .
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, pour tout réel t de $]-2; -1[$, $f_n(t) \leqslant f_{n+1}(t)$ et en déduire la monotonie de la suite (λ_n).
   (b) Montrer que la suite (λ_n) converge vers un réel ℓ.
Si l'on suppose que $\ell \in]-2; -1[$, comparer $f_n(\lambda_n)$ et $f_n(\ell)$.
   (c) Pour $\lambda \in]-2; -1[$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda}$ et conclure sur la valeur de ℓ.
   (d) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \leqslant 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (e) Déterminer un équivalent de $\frac{1}{1+\lambda_n}$ puis de $\lambda_n + 1$. On pourra utiliser un encadrement de $\sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k+\lambda_n}$.
5. On souhaite maintenant montrer ce qui a été admis en 3.(b).
Montrer, à l'aide du système traduisant la recherche des valeurs propres/vecteurs propres, que les valeurs propres de A_n sont les solutions de l'équation E_n.

SUJET 2 : AGRO 2025

Question de cours

Donner la définition d'une matrice inversible et de l'inverse d'une matrice inversible.

Exercice préparé

On cherche à trouver des individus au sein d'une population possédant une propriété détectable par une analyse de sang (par exemple, être malade). On fixe $q \in]0; 1[$ et l'on suppose que les individus ont, indépendamment les uns des autres, une probabilité q de ne pas posséder la propriété recherchée. Le résultat de l'analyse d'un échantillon de sang est dit positif si la propriété est présente, négatif si elle ne l'est pas. On va étudier divers protocoles de test.
On désire dans un premier temps trouver toutes les personnes qui ont la propriété dans un ensemble de n personnes, où n est un entier tel que $n \geqslant 2$.

1. Dans cette question, on étudie le protocole A, qui consiste à mélanger le sang des n personnes et analyser ce mélange. Si le résultat est négatif, on s'arrête (car cela signifie alors que personne ne possède la propriété recherchée). S'il est positif, on analyse alors individuellement le sang de chacune des n personnes. On note A_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole A pour n personnes.
   (a) Déterminer $A_n(\Omega)$.A_n admet-elle une espérance ?
   (b) Déterminer la loi de A_n.
   (c) Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument une liste L de n booléens et renvoie la valeur de A_n, en considérant qu'un `True` en k^e position signifie que la k^e personne possède la propriété recherchée, un `False` qu'elle ne la possède pas.
   (d) Utiliser la fonction en langage Python de la question précédente pour estimer numériquement $\mathbb{E}(A_{10})$ avec $q = 0.9$.
   (e) Prouver que $\mathbb{E}(A_n) = n + 1 - nq^n$.
   (f) On considère un entier naturel k tel que $1 \leqslant k < n$.
Calculer la probabilité que les k premières personnes testées soient toutes négatives sachant que le résultat de l'analyse du mélange est positif.
2. Dans cette question, on étudie le protocole B, qui consiste à directement analyser individuellement le sang de chacune des n personnes. On pourra noter B_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole B pour n personnes.

(a) À quelle condition sur q fait-on, en moyenne, moins de tests avec le protocole A qu'avec le protocole B? On exprimera le résultat en fonction de n.

(b) Étudier les variations et calculer la limite à droite, en 0 , de $x \mapsto x^x$.

(c) Justifier que, pour n assez grand, l'un des deux protocoles (que l'on déterminera) est préférable à l'autre (c'est-à-dire donne lieu à moins d'analyses en moyenne).

3. Dans cette question, on étudie un procédé « par regroupements » : on mélange le sang des n premières personnes de la population puis l'on teste ce mélange. Si le résultat est négatif, on procède de même avec les n personnes suivantes.
Dès lors qu'un groupe de n personnes est testé positivement, on teste alors individuellement les n personnes de ce groupe, jusqu'à trouver la première personne possédant la propriété recherchée. On note G la variable aléatoire représentant le numéro du premier groupe positif. Ainsi, $G = 1$ si c'est le premier groupe qui a donné un test positif, $G = 2$ si c'est le second, etc. On considère k un entier strictement positif.

(a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(G > k)$.

(b) En déduire la loi de G.

Sujet 3 : Agro 2025

Question de cours

Énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales sur un segment.

Exercice préparé

Tous les vecteurs et toutes les matrices de cet exercice sont à coefficients réels.

1. Soit D une matrice diagonale d'ordre $n \geqslant 1$ dont les éléments diagonaux sont $(d_1,\dots,d_n)$.

(a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne. Vérifier que $X^\top DX = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2$.

(b) En déduire que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs si et seulement si $X^\top DX > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul.

2. (a) Écrire une fonction en langage Python nommée `f` qui prend en entrée une matrice carrée `M` et qui renvoie $X^\top MX$ où X est un vecteur colonne dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0;1]$.

(b) Écrire un script qui affiche le nombre de fois que l'inégalité $X^\top(A-3I)X > 0$ est vérifiée après 100 exécutions de la fonction pour la matrice A ci-dessous (et I la matrice identité de même taille que A).

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère les vecteurs $U_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

4. (a) Montrer que le vecteur U_1 est un vecteur propre de A et donner la valeur propre associée.

(b) Montrer que l'ensemble des vecteurs X tels que $AX = X$ est un sous-espace propre de A et que ce sous-espace propre admet pour base orthonormée (U_2, U_3).

(c) Déterminer une matrice P et une matrice diagonale D telles que $A = PD^2P^\top$ et $P^\top P = I$.

(d) En déduire qu'il existe une matrice inversible L telle que $A = LL^\top$.

5. Soit B une matrice symétrique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Vérifier que $C = L^{-1}B\left(L^{-1}\right)^\top$ est une matrice symétrique (où L est la matrice définie à la question 3(d)).
En déduire qu'il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $Q \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B = LQ\Delta(LQ)^\top$.

En utilisant les matrices Q et Δ de la question 4(a), on pose $R = LQ$. On a ainsi $B = R\Delta R^\top$.

(b) Calculer $RR^\top$.

Sujet 4 : Agro 2025

Question de cours

Énoncer le lemme des coalitions.

Exercice préparé

1. On considère les équations différentielles suivantes, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \tag{H}$$
$$y'' - 4y' + 5y = 2 - e^{2x} \tag{E}$$

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (H).

(b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
On pourra chercher une solution particulière y_0 de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 5y = -e^{2x}$$

sous la forme $y_0 : x \longrightarrow ce^{2x}$, où c est un réel à déterminer.

2. Pour tout réel x, on note $C(x) = \int_0^x e^{2t}\cos(t)\,dt$ et $S(x) = \int_0^x e^{2t}\sin(t)\,dt$.

(a) Montrer que, pour tout x réel, $C(x) = \dfrac{e^{2x}\cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2}S(x)$ et $S(x) = \dfrac{e^{2x}\sin(x)}{2} - \frac{1}{2}C(x)$.

(b) En déduire une primitive de $x \mapsto e^{2x}\cos(x)$ et une primitive de $x \mapsto e^{2x}\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Écrire une fonction en langage Python, nommée `intC`, prenant en paramètres un réel `x` , et un entier `nb_pas`, qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^x e^{2t}\cos(t)dt$ obtenue à l'aide de la méthode des rectangles. L'intervalle $[0; x]$ doit être découpé en `nb_pas` intervalles de même longueur.

Dans toute la suite, on note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les quatre fonctions suivantes de E :

$$f_1 : x \longmapsto 1, \quad f_2 : x \longmapsto e^{2x}, \quad f_3 : x \longmapsto e^{2x}\cos(x), \quad f_4 : x \longmapsto e^{2x}\sin(x),$$

On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

4. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.
5. On note u l'application définie sur F par $u(f) = f'$ pour tout $f \in F$.
   (a) Montrer que u est linéaire.
   (b) Calculer l'image par u de f_1, f_2, f_3 et f_4.
   (c) En déduire que u est un endomorphisme de F, et déterminer la matrice représentative A de l'endomorphisme u dans la base $\mathscr{B}$.
6. Résoudre l'équation $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

   Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi ? Justifier.
7. Résoudre l'équation $\left(A^2 - 4A + 5I_4\right)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

   Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi ? Justifier.

SUJET 5 : AGRO 2025

Question de cours

Donner la définition de $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$, où pour tout entier naturel n, A_n est un ensemble.

1. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = xf(x).$$

   (a) Représenter en Python sur un même graphe les fonctions f et g sur l'intervalle $[-2; 2]$.
   (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer $g'(x)$ pour tout réel x.
   (d) La fonction g est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?
2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et la fonction f définie à la question 1 :

$$F = \text{Vect}\left(f_0, f_1, f\right)$$

   Prouver que la famille (f_0, f_1, f) est une base de F.
3. Pour toute fonction φ de F, on note $\Phi(\varphi)$ la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x\varphi(x)$.
   (a) Montrer que l'application $\Phi : \varphi \mapsto \Phi(\varphi)$ est linéaire.
   (b) Vérifier que $\Phi\left(f_0\right) = f_0, \Phi\left(f_1\right) = 2f_1$ et calculer $\Phi(f)$.
   (c) En déduire que Φ est un endomorphisme de F et préciser sa matrice M dans la base $\left(f_0, f_1, f\right)$ de F.
   (d) L'endomorphisme Φ est-il bijectif de F vers F ? Si oui, préciser la matrice de Φ^{-1} dans la base $\left(f_0, f_1, f\right)$.
   (e) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

SUJET 6 : AGRO 2024

Question de cours

Donner la définition des fonctions partielles d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice préparé

On rappelle que si S et T sont deux variables aléatoires réelles de densités respectives f_S et f_T et indépendantes, alors $S+T$ est une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par la formule de convolution :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{S+T}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s)f_T(t-s)\,ds. \tag{E}$$

1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0;1[$ et λ un réel strictement positif.

   On note $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. Vérifier que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
2. Écrire un programme Python qui simule une loi exponentielle.
3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X.

   On définit la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

(a) À l'aide d'une récurrence, montrer que la fonction f_n définie ensuite est une densité de probabilité.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

(b) En utilisant la formule de convolution (E) et une récurrence, montrer que f_n est une densité de S_n pour tout $n \geqslant 1$.

4. On suppose qu'à un arrêt, les différences entre les horaires de passage successifs d'un bus sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ. On définit un instant $S_0 = 0$, puis on note S_1, S_2, etc les horaires de passage successifs des bus. On note alors, pour $t > 0$, N_t le nombre de bus passés à l'arrêt, entre l'instant 0 et l'instant t. Autrement dit : $\forall n \geqslant 0, [N_t = n] = [S_n \leqslant t < S_{n+1}]$.
   (a) Pour $n \geqslant 0$, exprimer (avec soin) l'événement $[N_t \geqslant n]$ à l'aide de S_n.
   (b) Justifier alors que : $\forall n \geqslant 0, \mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leqslant t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant t)$.
   (c) En déduire que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.

5. On suppose plus précisément que les horaires de passages successifs d'un bus sont, en moyenne, de 10 minutes. Un individu arrive à l'arrêt à l'instant $T = 100$ min pour prendre le bus.
   On se pose alors les deux questions suivantes :
   - Combien de temps en moyenne va-t-il attendre le prochain bus ?
   - Combien de temps en moyenne s'écoule-t-il entre le prochain bus et le bus qui a précédé ?

   Pour y répondre, on réalise le programme Python suivant :

```python
import math as m
import random as rd
def autobus():
    a, b, N = 0, 0, 10000
    for k in range(N):
        s = 0
        while s < 100:
            r = s
            s = s - 10*m.log(1-rd.random())
        u, v = s - 100, s-r
        a, b = a + u, b + v
    return a / N, b / N
```

   (a) Expliquer ce que représentent les variables r, s, u et v dans le programme.
   (b) Le programme affiche les valeurs suivantes : 10.062252   20.315494 Pourquoi les valeurs affichées sont-elles paradoxales vis à vis de la situation ?

SUJET 7 : AGRO 2024

Question de cours

Donner la définition d'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E.

Exercice préparé

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est adaptée à f si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n f(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) \qquad (*)$$

On admet que si une fonction non identiquement nulle f possède une suite adaptée, alors cette suite est unique. On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant une suite adaptée.

1. Montrer que la suite constante égale à 1 est adaptée à la fonction $x \mapsto x - \frac{1}{2}$.
2. Montrer que si f est une fonction dérivable admettant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ comme suite adaptée, alors la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est adaptée à la fonction f'. On admet dans la suite que l'on peut définir une suite de polynômes $\left(B_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, B_p' = pB_{p-1} \text{ et } \displaystyle\int_0^1 B_p(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$

L'objectif est alors de montrer que pour tout entier naturel p, B_p appartient à E.

3. Écrire une fonction Python qui prend en argument une liste de réels $L = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ et renvoie la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,\mathrm{d}x$.
4. Calculer B_1 et B_2 et vérifier que B_0 et B_1 appartiennent à E.
5. Déterminer, pour tout entier naturel p, le degré et le coefficient dominant de B_p.
6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que B_{p-1} appartient à E et on cherche à montrer que B_p appartient aussi à E.
   (a) Montrer que si B_p appartient à E, alors la suite $\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)_{n \in N^*}$ est adaptée à B_p.
   (b) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)$ est constante.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^{1/n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.
   (d) Conclure.

SUJET 8 : AGRO 2024

Question de cours

Donner la définition d'une densité de probabilité.

Exercice préparé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme usuelle notée $\| \cdot \|$.
Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Pour toute famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit G la matrice de Gram de $(u_1, \ldots, u_p)$ par

$$G = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_1, u_p \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_2, u_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_p, u_1 \rangle & \langle u_p, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_p, u_p \rangle \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$$

1. (a) Écrire une fonction Python `ps` prenant en argument deux vecteurs u et v sous formes de liste de même taille et renvoyant le produit scalaire $\langle u, v \rangle$.
   (b) Écrire une fonction Python `Gram` prenant en argument une famille de vecteurs ($u_1, \ldots, u_p$) sous forme d'une liste de listes et renvoyant la matrice de Gram de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$.
   (c) Tester votre fonction avec les vecteurs $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.
2. Justifier que la matrice de Gram d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable.
3. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de $\mathbb{R}^n$ et G sa matrice de Gram. On cherche à montrer que la famille est libre si et seulement si G est inversible.
   (a) On suppose que G est inversible. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k = 0$. On pose $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que $GX = 0$, puis en déduire que ($u_1, \ldots, u_p$) est libre.
   (b) On suppose que $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.
   Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $GX = 0$.
      i. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\left\langle u_i, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k \right\rangle = 0$.
      ii. En déduire que $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k = 0$.
      iii. Montrer que $X = 0$, puis que G est inversible.
4. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \|v_i\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow \left\| v_i - v_j \right\| = 1.$$

   (a) Pour tous a et $b \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle$.
   (b) En déduire la matrice de Gram de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$, que l'on notera G.
   (c) On pose $A = 2G$. Exprimer A^2 en fonction de n, A et I_n (la matrice identité de taille n).
   En déduire que A est inversible.
   (d) Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

SUJET 9 : AGRO 2024

Question de cours

Énoncer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales sur un segment.

Exercice préparé

Soit n un entier naturel non-nul.
On dispose de n jetons et de trois urnes numérotées de 1 à 3 .
Pour chaque jeton, on choisit une des trois urnes au hasard et avec équiprobablité et on place le jeton dans l'urne choisie. Le placement de chaque jeton est indépendant du placement de tous les autres jetons.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons contenus dans l'urne 1 à la fin de l'expérience, et on note Y le nombre d'urnes restées vides à la fin de l'expérience.

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier naturel n non nul, simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus, et renvoie les valeurs de X et de Y obtenues.
2. Dans cette question, $n = 10$. Utiliser la fonction précédente pour simuler un grande nombre de fois l'expérience et obtenir une valeur approchée de $E(XY)$, $E(X)$ et $E(Y)$. Que peut-on conjecturer sur la valeur de la covariance du couple (X, Y) ?
3. Dans cette question, $n = 2$.
   (a) Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, puis donner la loi conjointe du couple (X, Y) sous forme de tableau.
   (b) Donner la loi de X, puis celle de Y.
   (c) Calculer la covariance du couple (X, Y).
4. Dans cette question, on revient au cas général où n est un entier naturel quelconque.
   Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne numéro i est vide à la fin de l'expérience, et qui vaut 0 sinon.
   (a) Déterminer la loi de X, et donner la valeur de son espérance.
   (b) En remarquant que $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$, calculer $E(Y)$.
   (c) Démontrer que :

$$\forall i \in \{2, 3\}, \forall j \in [\![0, n]\!], \qquad \mathbb{P}\left(X = j \cap Y_i = 1\right) = \binom{n}{j} \times \frac{1}{3^n}.$$

(d) Calculer alors $E\left(XY_i\right)$ pour $i \in \{2,3\}$. Que vaut cette espérance si $i = 1$?

(e) Calculer la covariance du couple (X, Y).

Sujet 10 : Agro 2024

Question de cours

Donner la définition du gradient d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice préparé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ l'application D par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad D(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. (a) Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer $D(1)$ puis $D\left(X^k\right)$ pour tout entier naturel k de $[\![1, n]\!]$.
   (c) Donner la matrice de D dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (d) Déterminer le spectre de $D.D$ est-il diagonalisable ?
2. On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B} = (H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Calculer $D(H_0)$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $D\left(H_k\right) = kH_{k-1}$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de D dans la base $\mathscr{B}$.
3. En Python, un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est codé en listant ses $n+1$ coefficients par ordre croissant de degré.
   Par exemple, dans $\mathbb{R}_4[X]$, le polynôme $P = 5X^3 - 2X + 3$ est représenté par la liste $[3, -2, 0, 5, 0]$.
   (a) Programmer une fonction Python qui prend en argument une liste de longueur $n+1$ modélisant un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et un réel a, et qui renvoie alors la liste modélisant $(X-a)P$.
   (b) Programmer une fonction Python qui prend en argument un entier naturel non nul n et qui renvoie la liste modélisant le polynôme H_n.
4. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Montrer que $H_2(Y)$ admet une espérance, en déduire que $H_1(Y)$ et $H_0(Y)$ admettent une espérance. Déterminer alors $E(H_0(Y))$, $E(H_1(Y))$ et $E(H_2(Y))$.
   (b) Déterminer les coordonnées de $1, X$ et X^2 dans la base (H_0, H_1, H_2).
   (c) Retrouver la valeur de la variance de Y.
5. On note $\mathscr{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   À tout élément $f \in E$, on associe la fonction $g = \tilde{D}(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \tilde{D}(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

   (a) On dit qu'un réel λ est une valeur propre de $\tilde{D}$ s'il existe une fonction non nulle f de E telle que $\tilde{D}(f) = \lambda f$. En considérant les fonctions $h_a : x \longmapsto e^{ax}$ et $k_a : x \longmapsto \sin(\pi x)e^{ax}$ où a est un réel, déterminer les valeurs propres de $\tilde{D}$.
   (b) Si F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X, montrer que $g = \tilde{D}(F)$ est une densité de probabilité.
   (c) Expliciter g si X suit la loi uniforme sur $[0; 1]$.

Sujet 11 : Agro 2023

Question de cours

Énoncer le théorème de transfert dans le cas d'une variable aléatoire admettant une densité.

Exercice préparé

Pour tout $n \geqslant 1$. On considère la matrice $K_n \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(K_n)_{i,i+1} = i$, et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $(K_n)_{j+1,j} = -n-1+j$ et dont tous les autres coefficients sont nuls. On a donc :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de K_1. Cette matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
2. Écrire une fonction K en Python qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la matrice K_n.
3. Utiliser la fonction précédente et la fonction `eigvals` du module `numpy.linalg` pour déterminer les valeurs propres de K_n pour $n \in [\![1, 10]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
4. On se propose de montrer la conjecture faite dans la question précédente. On note $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ et V_n le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par la famille de fonctions $\mathscr{B}_n = (f_k)_{k \in [\![0, n]\!]}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^{n-k}(x)\sin^k(x)$$

   On considère l'application φ_n définie pour tout $f \in V_n$ par $\varphi_n(f) = f'$
   (a) Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $x \in]-\pi/2; \pi/2[$. Montrer que

$$\lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lambda_0 + \lambda_1 \tan(x) + \cdots + \lambda_n \tan(x)^n = 0$$

   (b) En déduire que la famille $\mathscr{B}_n$ est une base de V_n et la dimension de V_n.
   (c) Monter que φ_n est un endomorphisme de V_n et déterminer sa matrice dans la base $\mathscr{B}_n$.

(d) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on note g_k la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \exp(i(n-2k)x)$$

Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = (\cos(x) + i\sin(x))^{n-k}(\cos(x) - i\sin(x))^k$.

(e) En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, g_k appartient à V_n. *Indication :* On pourra utiliser sans le justifier que $\left(\sum_{j=0}^{n-k} a_j\right)\left(\sum_{l=0}^{k} b_l\right) = \sum_{j=0}^{n-k}\sum_{l=0}^{k} a_j b_l$.

(f) En déduire les valeurs propres de φ_n puis celle de K_n.

(g) La matrice K_n est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

(h) Déterminer pour quelle valeur de n, la matrice K_n est inversible.

(i) Lorsque K_n n'est pas inversible, déterminer une base du noyau.

SUJET 12 : AGRO 2023

Question de cours

Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice préparé

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on effectue n tirages successifs d'une boule avec remise. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de numéros distincts obtenus.

2. Déterminer la loi de X dans les cas $n = 2$ et $n = 3$. Que vaut l'espérance de X dans les cas $n = 2$ et $n = 3$?
3. (a) Écrire une fonction Python d'argument n qui simule l'expérience et renvoie la liste des numéros tirés.
   (b) Écrire une fonction Python d'argument n qui simule la variable X.
   On pourra obtenir l'ensemble des valeurs d'une liste L avec la commande set (L) et obtenir le cardinal d'un ensemble s avec la commande len(s).
   (c) Écrire une fonction Python d'argument n qui calcule une valeur approchée de l'espérance de X.
4. Calculer :
   (a) $P(X = 1)$
   (b) $P(X = n)$
   (c) $P(X = 2)$
   (d) $P(X = n-1)$
5. Pour i entre 1 et n, on note A_i l'événement "le numéro i fait partie des numéros obtenus au cours des n tirages" et on note X_i la variable indicatrice de l'événement A_i (X_i prend la valeur 1 si A_i est réalisé et 0 sinon).
   (a) Calculer la loi de X_i et son espérance.
   (b) Calculer l'espérance de X ainsi qu'un équivalent de $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. (a) Pour i et j distincts entre 1 et n, calculer la loi de la variable $X_i X_j$.
   (b) Calculer la variance de X.

SUJET 13 : AGRO 2023

Question de cours

Lien(s) entre l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes et leur covariance.

Exercice préparé

1. On considère φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que le spectre de l'endomorphisme φ est : $Sp(\varphi) = \{1, 3\}$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
   (b) On note $a_1 = (1,1,0)$, $a_2 = (0,0,1)$ et $a_3 = (1,-1,0)$.
   Montrer que la famille $\mathscr{B} = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base $\mathscr{B}$.
   (c) Déterminer une matrice carrée P telle que $A = PMP^{-1}$ et expliciter P^{-1} à l'aide de la fonction inv de Python. La commande inv du module linalg de la bibliothèque numpy permet de calculer l'inverse d'une matrice carrée de type matrix.
2. Soient f, g et h trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f'(t) = 2f(t) + g(t) + h(t) \\ g'(t) = f(t) + 2g(t) + h(t) \\ h'(t) = 3h(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad f(0) = g(0) = h(0) = 1$$

   (a) Déterminer l'expression de $h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis tracer à l'aide de Python l'allure de la courbe représentative de h sur l'intervalle $[0; 1]$.
   (b) On note $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$.
   On note $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ et $Y'(t) = P^{-1}X'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$.
   Vérifier qu'on a : $\forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = 3u(t) + e^{3t}$.

(c) En déduire l'expression de $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(d) Déterminer alors l'expression de $f(t)$ et $g(t)$ en fonction de t.

SUJET 14 : AGRO 2023

Question de cours

Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a.

Exercice préparé

On rappelle que, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant respectivement les densités f et g, alors la variable aléatoire $X+Y$ admet une densité $f*g$ définie par

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V suivant la loi uniforme sur $]0;1[$.
   Soient λ, μ deux réels strictement positifs.
   (a) Déterminer les lois des variables aléatoires $-\frac{1}{\lambda}\ln(U)$ et $-\frac{1}{\mu}\ln(V)$.
   (b) On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ.
   Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument les valeurs de λ et μ et qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire $\min(X,Y)$.
   (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\min(X,Y)$ et vérifier qu'il s'agit d'une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   (d) Déterminer la loi de $-Y$.
   (e) Montrer qu'une densité de $X-Y$ est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x>0 \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{\mu x} & \text{si } x\leqslant 0 \end{cases}$$

   (f) Calculer alors la probabilité de l'événement $[X \leqslant Y]$.
2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :
   - X_1, X_3, X_5 et plus généralement X_{2n+1} pour $n\in\mathbb{N}$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1 ;
   - X_2, X_4, X_6 et plus généralement X_{2n} pour $n\in\mathbb{N}^*$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 2 .

   Si $i\geqslant 2$, on dit que l'événement « X_i est un creux » est réalisé si $[X_i \leqslant X_{i-1}]$ et $[X_i \leqslant X_{i+1}]$ sont réalisés tous les deux.
   (a) À l'aide de Python, estimer la probabilité des événements « X_2 est un creux » et « X_3 est un creux ».
   (b) Calculer la probabilité des deux événements précédents.
3. (a) Que vaut la probabilité de l'événement « X_2 et X_3 sont des creux » ?
   (b) Les événements « X_4 est un creux » et « X_8 est un creux» sont-ils indépendants ?
   (c) Déterminer la loi du nombre de creux parmi les 10 variables aléatoires $X_4, X_8, X_{12}, \dots, X_{40}$.

SUJET 15 : AGRO 2023

Question de cours

Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Exercice préparé

- On dispose initialement d'une urne U_0 contenant 1 boule blanche et 2 boules rouges.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on remplit ensuite l'urne U_{n+1} avec 3 boules de la façon suivante. On effectue 3 tirages avec remise dans l'urne U_n, et pour chaque boule rouge (respectivement blanche) tirée, on place une nouvelle boule rouge (respectivement blanche) dans l'urne U_{n+1}.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note Y_n le nombre de boules blanches dans l'urne U_n. En particulier $Y_0=1$.

1. Identifier la loi de la variable aléatoire Y_1.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$, et $k\in\{0;1;2;3\}$. Déterminer la loi de Y_{n+1} sous la probabilité conditionnelle $P_{[Y_n=k]}$, c'est-à-dire calculer, pour tout $j\in\{0;1;2;3\}$: $P_{[Y_n=k]}\left(Y_{n+1}=j\right)$.
3. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier $n\in\mathbb{N}^*$ et simulant les variables aléatoires $Y_1,\dots,Y_n$. La fonction renverra le résultat sous la forme d'une liste $[Y_0, Y_1, \dots, Y_n]$
4. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Justifier que tout $k\in\{0;1;2;3\}$, $\sum_{j=0}^{3} jP_{[Y_n=k]}\left(Y_{n+1}=j\right)=k$.
   (b) En déduire que $E(Y_{n+1})=E(Y_n)$.
   (c) En déduire l'expression de $E(Y_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $a_n=P(Y_n=0)$, $b_n=P(Y_n=1)$ $c_n=P(Y_n=2)$, et $d_n=P(Y_n=3)$.

5. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_{n+1}+c_{n+1}=\dfrac{2}{3}(b_n+c_n)$.
6. En déduire la convergence et la limite des suites (b_n) et (c_n).
7. Montrer que la suite (a_n) et la suite (d_n) sont croissantes. Montrer qu'elles convergent.
8. À l'aide de la question 4 , montrer que (d_n) converge vers 1/3. Quelle est la limite de la suite (a_n) ? Interpréter le résultat.
9. On note T le numéro de la première urne ne contenant que des boules rouges ou que des boules blanches.
   (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer $P(T>n)$.
   (b) En déduire la loi de T et son espérance.