

SUJET 1 : AGRO 2025

Question de cours

Donner la définition de fonction de densité de probabilité.

RÉPONSE:

Une fonction f définie sur \mathbb{R} , positive, continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de points, et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1 peut représenter une densité de probabilité.



Exercice préparé

1. (a) Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x}$. Étudier la fonction f sur son ensemble de définition et dresser un tableau de variations complet. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.

RÉPONSE:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$

Sur chacun des intervalles $]-\infty; -2[$, $]-2; -1[$ et $]-1; +\infty[$, f est la somme de deux fonctions strictement décroissantes, donc est strictement décroissante.

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 0	

Aucune des limites n'est une forme indéterminée

Pour $x \in]-\infty; -2[$, $f(x) < 0$, donc sur cet intervalle $f(x) = 1$, n'admet aucune solution. f est continue (opération), strictement décroissante sur l'intervalle $]-2-1$ et $1 \in]\lim_{-2^+} f; \lim_{-1^-} f[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-2; -1[$.

De même cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]-1; +\infty[$

L'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions sur D_f .



- (b) Déterminer les solutions exactes de l'équation $f(x) = 1$.

RÉPONSE:

Soit $x \in D_f$.

$$\begin{aligned}
 f(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2+x} = 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2+x+2(1+x)}{(1+x)(2+x)} \\
 &\Leftrightarrow 4+3x = 2+3x+x^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 2 = 0
 \end{aligned}$$

Les deux solutions sont $-\sqrt{2} \in]-2; -1[$ et $\sqrt{2} \in]-1; +\infty[$.



Soit A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et tels que les autres coefficients situés sur la colonne j sont égaux à j pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2. (a) Écrire une fonction Python d'argument n renvoyant A_n .

RÉPONSE:

```

import numpy as np
import numpy.linalg as la

def matriceA(n):
    A=np.zeros([n,n])
    for j in range(n):
    
```

```

for i in range(n):
    if i!=j:
        A[i,j]=j+1# décalage, tableau numpy
return A

```



(b) En déduire une valeur approchée des valeurs propres de A_n pour $n \in \{2, 3, 4, 10\}$.

RÉPONSE:

```

for i in [2,3,4,10]:
    print(la.eigvals(matriceA(i)))

```

on obtient

```

[ 1.41421356 -1.41421356]
[ 3.76643548 -1.28282386 -2.48361162]
[ 7.1061962  -1.21448662 -3.52502525 -2.36668434]
[48.11195054 -1.08895994 -2.15868999 -9.63101185 -3.22099543 -8.53470637
-4.27999435 -5.33818536 -7.46161804 -6.39778921]

```



3. Pour $n \geq 2$, On pose :

$$f_n : t \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+t}$$

et on considère l'équation E_n d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda} = 1$$

(a) Montrer que l'équation E_n admet une unique solution dans chacun des intervalles $] -1; +\infty[$ et $] -k; -(k-1)[$, pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

RÉPONSE:

C'est la même réponse que pour la première question



(b) On admet (pour l'instant) que toutes les valeurs propres de A_n sont les solutions de l'équation E_n .
La matrice A_n est-elle diagonalisable?

RÉPONSE:

A_n est une matrice carrée de taille n qui admet n valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable (condition suffisante).

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, A_n est diagonalisable.



4. Pour $n \geq 2$, on appelle λ_n la solution de E_n comprise entre -2 et -1 .

(a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, pour tout réel t de $] -2; -1[$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ et en déduire la monotonie de la suite (λ_n) .

RÉPONSE:

Soit un entier naturel n non nul, et un réel t de $] -2; -1[$,

$$f_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{k+t} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+t} + \frac{n+1}{n+1+t} = f_n(t) + \frac{n+1}{n+1+t}$$

Comme $\frac{n+1}{n+1+t}$ est positif

Pour tout entier naturel n non nul, pour tout réel t de $] -2; -1[$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$.

Classique

On a donc, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$f_n(\lambda_n) \leq f_{n+1}(\lambda_n)$$

donc comme $f_n(\lambda_n) = 1 = f_n(\lambda_{n+1})$

$$f_{n+1}(\lambda_{n+1}) \leq f_{n+1}(\lambda_n)$$

et comme f_{n+1} est strictement décroissante sur l'intervalle $] -2; -1[$ et que λ_n et λ_{n+1} appartiennent à cet intervalle.

$$\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$$

La suite (λ_n) est croissante.



- (b) Montrer que la suite (λ_n) converge vers un réel ℓ .
Si l'on suppose que $\ell \in]-2; -1[$, comparer $f_n(\lambda_n)$ et $f_n(\ell)$.

RÉPONSE:

La suite (λ_n) est croissante et majorée, en utilisant le théorème de la limite monotone :

La suite (λ_n) est convergente.

On sait de plus que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -2 < \lambda_n < -1$$

donc en passant à la limite

$$-2 \leq \ell \leq -1$$

En raffinant le raisonnement, et en utilisant la croissance de la suite (λ_n)

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -2 < \lambda_1 \leq \lambda_n < -1$$

en passant à la limite

$$-2 < \lambda_0 \leq \ell \leq -1$$

Supposons que $\ell \in]-2; -1[$.
Par croissance de la suite

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \quad -2 < \lambda_n \leq \ell < -1$$

en utilisant la décroissance de f_n sur l'intervalle $] -2; -1[$.

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \quad f_n(\ell) \leq f_n(\lambda_n)$.

✱

- (c) Pour $\lambda \in]-2; -1[$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda}$ et conclure sur la valeur de ℓ .

RÉPONSE:

La série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{k}{k+\lambda}$ a un terme général qui tend vers 1 donc elle diverge. De plus elle est à termes positifs.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda} = +\infty$.

on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\ell) = +\infty$$

Le résultat de la question précédente donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \quad f_n(\ell) \leq 1$$

et donc en passant à la limite on tombe sur une contradiction. Par un raisonnement par l'absurde :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = -1$

✱

- (d) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

RÉPONSE:

Méthode 1 : égalité des accroissements finis Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et soit $g : [k-1; k] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$t \mapsto \sqrt{t}$$

cette fonction est continue sur $[k-1; k]$ et dérivable $]k-1; k[$, on peut donc appliquer l'égalité des accroissements finis.

$$\exists t_0 \in]k-1; k[\quad \frac{g(k) - g(k-1)}{k - (k-1)} = g'(t_0)$$

donc

$$\exists t_0 \in]k-1; k[\quad \sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{2\sqrt{t_0}}$$

or comme $g \geq 1$:

$$t_0 \leq k \leq k^2$$

et donc

$$\frac{1}{\sqrt{t_0}} \geq \frac{1}{k}$$

ce qui démontre le résultat attendu.

Méthode 2 : manipulations Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})}{(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})} \quad \text{quantité conjuguée}$$

$$= \frac{(\sqrt{k})^2 - (\sqrt{k-1})^2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

$$\text{car } \sqrt{k} \geq \sqrt{k-1}$$

$$\geq \frac{1}{2k}$$

comme $k \geq 1$, on a $k \geq \sqrt{k}$

$$\text{Pour } k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, un télescopage sur l'inégalité précédente donne

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sqrt{n} - \sqrt{0}$$

et donc

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

En utilisant le théorème des encadrements

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 0$$

⊛

- (e) Déterminer un équivalent de $\frac{1}{1+\lambda_n}$ puis de $\lambda_n + 1$. On pourra utiliser un encadrement de $\sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n}$.

RÉPONSE:

Remarque : Question dure, il faut se laisser guider par les indications de l'examinateur. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$f_n(\lambda_n) = 1$ donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda_n} = 1$$

donc

$$\frac{1}{1+\lambda_n} + \frac{2}{2+\lambda_n} + \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n} = 1$$

On a pour $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$, et comme $\lambda_n \in]-2; -1[$

$$k-2 \leq k+\lambda_n \leq k-1$$

donc

$$\frac{k}{k-1} \leq \frac{k}{k+\lambda_n} \leq \frac{k}{k-2}$$

donc

$$\sum_{k=3}^n \frac{k}{k-1} \leq \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n} \leq \sum_{k=3}^n \frac{k}{k-2}$$

donc avec des changements d'indice

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{k+1}{k} \leq \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n} \leq \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k+2}{k}$$

donc

$$\sum_{k=2}^{n-1} 1 + \frac{1}{k} \leq \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n} \leq \sum_{k=1}^{n-2} 1 + \frac{2}{k}$$

donc

$$(n-2) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n} \leq n-2 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{2}{k}$$

donc

$$(n-2) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 - \frac{1}{n} \leq \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n} \leq n-2 + \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

donc en divisant par n qui est strictement positif

$$\frac{n-2}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n} \leq \frac{n-2}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} - \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}$$

En utilisant le théorème des encadrements, le résultat de la question précédente et le calcul de quelques limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n} = 1$$

On reprend les calculs en début de question

$$\frac{1}{1+\lambda_n} = 1 - \frac{2}{2+\lambda_n} - \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n}$$

donc

$$\frac{1}{n} \frac{1}{1+\lambda_n} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n(2+\lambda_n)} - \frac{1}{n} \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = -1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n(2+\lambda_n)} = 0$$

ce qui démontre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\lambda_n} = 1$$

donc

$$\frac{1}{1+\lambda_n} \sim n$$

$$1 + \lambda_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

⊛

5. On souhaite maintenant montrer ce qui a été admis en 3.(b).
 Montrer, à l'aide du système traduisant la recherche des valeurs propres/vecteurs propres, que les valeurs propres de A_n sont les solutions de l'équation E_n .

RÉPONSE:

Remarque : Question très dure, sûrement traitée par très peu de candidats.
 On commence par remarquer¹ que pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et λ un réel

$$\lambda \text{ solution de } E_n \Leftrightarrow \frac{-\lambda}{\lambda+i} + \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \neq i}} \frac{k}{k+\lambda} = 0$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ on sait que

$$\lambda \in \text{Sp}(A_n) \Leftrightarrow \text{rg}(A_n - \lambda I_n) < n$$

or

$$A_n - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -\lambda & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & -\lambda & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & -\lambda & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

On commence par intéresser aux valeurs propres différentes de $-1, -2, \dots, -n$, et on suppose donc que λ est différent de ces valeurs.

On peut alors diviser la première colonne de la matrice $A_n - \lambda I_n$ par $1 + \lambda$, la deuxième colonne par $2 + \lambda$ sans changer le rang/

$$\text{rg}(A_n - \lambda I_n) = \text{rg} \begin{pmatrix} \frac{-\lambda}{1+\lambda} & \frac{2}{2+\lambda} & \frac{3}{3+\lambda} & \cdots & \frac{n-1}{n-1+\lambda} & \frac{n}{n+\lambda} \\ \frac{1}{1+\lambda} & \frac{-\lambda}{2+\lambda} & \frac{3}{3+\lambda} & \cdots & \frac{n-1}{n-1+\lambda} & \frac{n}{n+\lambda} \\ \frac{1}{1+\lambda} & \frac{2}{2+\lambda} & \frac{-\lambda}{3+\lambda} & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \frac{3}{3+\lambda} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \frac{-\lambda}{n-1+\lambda} & \frac{n}{n+\lambda} \\ \frac{1}{1+\lambda} & \frac{2}{2+\lambda} & \frac{3}{3+\lambda} & \cdots & \frac{n-1}{n-1+\lambda} & \frac{-\lambda}{n+\lambda} \end{pmatrix}$$

1. on isole le terme i du Σ

L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$, ne change pas le rang la matrice et la première colonne devient alors

$$\begin{pmatrix} \frac{-\lambda}{\lambda+1} + \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \neq 1}} \frac{k}{k+\lambda} \\ \frac{-\lambda}{\lambda+2} + \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \neq 2}} \frac{k}{k+\lambda} \\ \vdots \\ \frac{-\lambda}{\lambda+i} + \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \neq i}} \frac{k}{k+\lambda} \\ \frac{-\lambda}{\lambda+n} + \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \neq n}} \frac{k}{k+\lambda} \end{pmatrix}$$

On constate donc, grâce à la remarque préliminaire, que si λ est solution de E_n alors la première colonne de la matrice finale est nulle donc son rang n'est pas n . Ceci démontre que toute solution de (E_n) est valeur propre de A_n . Comme ne n'avons pas raisonner par équivalence nous ne savons pas si nous avons trouvé toute les valeurs propres. Mais on sait que (E_n) a n solutions distinctes et qu'une matrice carrée de taille n à au plus n valeurs propres distinctes donc nous avons trouvé toutes les valeurs propres et l'hypothèse faite en début de raisonnement n'est pas restrictive.

Les valeurs propres de A_n sont exactement les solutions de (E_n) .

⊛

Exercice non préparé

- On considère des listes non vides ne contenant que 1 ou 2 valeurs différentes.
 Par exemple ['Marwa', 'Ambre', 'Marwa', 'Ambre', 'Ambre'].
 Écrire, en langage Python, une fonction nommée `election1(L)` qui prend en entrée une liste L de cette forme et qui renvoie l'élément qui est majoritaire. La fonction doit renvoyer None en cas d'égalité.
 Sur la liste donnée en exemple, la fonction doit renvoyer 'Ambre'.

RÉPONSE:

Il n'est pas attendu de vérifier si la liste vérifie les conditions de l'énoncé

Avec dictionnaire

```

def election1_dico(L):
    d={}
    for x in L:
        if x in d:
            d[x]+=1
        else:
            d[x]=1
    score_max=0
    gagnant=None
    for k in d: #décrit les clefs du dico
        if d[k]>score_max:
            score_max=d[k]
            gagnant=k
        elif d[k]==score_max:
            gagnant=None
    return gagnant

```

Sans dictionnaire

```

def election1_liste(L):
    liste_nom=[]
    liste_score=[]
    for x in L:
        if x not in liste_nom:
            liste_nom.append(x)
            liste_score.append(1)
        else:
            i=liste_nom.index(x)#position de x dans liste_nom
            liste_score[i]+=1
    if liste_score[0]==liste_score[1]:
        return None
    else:
        return liste_nom[liste_score.index(max(liste_score))]

```

✪

2. On considère maintenant des listes non-vides, mais pouvant contenir plus de 2 valeurs différentes. Par exemple ['Olivia', 'Gita', 'Mathys', 'Olivia', 'Mathys']. La liste représente une urne, et on veut savoir qui a obtenu le plus de voix. Écrire, en langage Python, une fonction nommée election2(L) qui prend une liste ayant cette forme et qui renvoie, la liste des personnes ayant obtenu le maximum de voix (la liste contient plusieurs personnes en cas d'égalité). Sur la liste donnée en exemple, la fonction doit renvoyer ['Olivia', 'Mathys'] ou ['Mathys', 'Olivia'] car Olivia et Mathys sont ex aequo avec deux voix chacun.

RÉPONSE:

Avec dictionnaire

```

def election2_dico(L):
    d={}
    for x in L:
        if x in d:
            d[x]+=1
        else:
            d[x]=1
    score_max=0
    gagnants=[]
    for k in d: #décrit les clefs du dico
        if d[k]>score_max:
            score_max=d[k]
            gagnants=[k]
        elif d[k]==score_max:
            gagnants.append(k)
    return gagnants

```

Sans dictionnaire

```

def election2_liste(L):
    liste_nom=[]
    liste_score=[]
    for x in L:
        if x not in liste_nom:
            liste_nom.append(x)
            liste_score.append(1)
        else:
            i=liste_nom.index(x)#position de x dans liste_nom
            liste_score[i]+=1
    score_max=max(liste_score)
    gagnants=[]
    for x in range(len(liste_nom)):
        if liste_score[x]==score_max:
            gagnants.append(liste_nom[x])
    return gagnants

```

✪

SUJET 2 : AGRO 2025

Question de cours

Donner la définition d'une matrice inversible et de l'inverse d'une matrice inversible.

RÉPONSE:

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que la matrice est **inversible** si et seulement si il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$.

Dans ce cas là B est unique est appelée **l'inverse** de A .



Exercice préparé

On cherche à trouver des individus au sein d'une population possédant une propriété détectable par une analyse de sang (par exemple, être malade). On fixe $q \in]0; 1[$ et l'on suppose que les individus ont, indépendamment les uns des autres, une probabilité q de ne pas posséder la propriété recherchée. Le résultat de l'analyse d'un échantillon de sang est dit positif si la propriété est présente, négatif si elle ne l'est pas. On va étudier divers protocoles de test. On désire dans un premier temps trouver toutes les personnes qui ont la propriété dans un ensemble de n personnes, où n est un entier tel que $n \geq 2$.

1. Dans cette question, on étudie le protocole A , qui consiste à mélanger le sang des n personnes et analyser ce mélange. Si le résultat est négatif, on s'arrête (car cela signifie alors que personne ne possède la propriété recherchée). S'il est positif, on analyse alors individuellement le sang de chacune des n personnes. On note A_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole A pour n personnes.

- (a) Déterminer $A_n(\Omega)$. A_n admet-elle une espérance?

RÉPONSE:

On fait soit une analyse groupée, dans le cas où le résultat est négatif le protocole est terminée et dans le cas contraire on effectue $n+1$ autres analyses.

$$A_n(\Omega) = \{1, n+1\}$$

A_n est une variable aléatoire à support fini,

$$A_n \text{ admet une espérance.}$$



- (b) Déterminer la loi de A_n .

RÉPONSE:

$A_n = 1$, les n individus ne possèdent pas la propriété. Comme on considère que les individus sont indépendants

$$\mathbb{P}(A_n = 1) = q^n$$

$$\mathbb{P}(A_n = 1) = q^n \text{ et } \mathbb{P}(A_n = n+1) = 1 - q^n$$



- (c) Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument une liste L de n booléens et renvoie la valeur de A_n , en considérant qu'un **True** en k^e position signifie que la k^e personne possède la propriété recherchée, un **False** qu'elle ne la possède pas.

RÉPONSE:

```
def nb_analyseA(L):
    nb_True=0
    for x in L:
        if x:## équivalent à if x == True
            nb_True+=1
    if nb_True==0:
        return 1
    else:
        return len(L)+1
```



- (d) Utiliser la fonction en langage Python de la question précédente pour estimer numériquement $\mathbb{E}(A_{10})$ avec $q = 0.9$.

RÉPONSE:

```
import random as rd

def echantillon(n,q):
    """renvoie un echantillon de longueur n"""
    L=[]
    for i in range(n):
        if rd.random()<q:
```

```

        L.append(False)
    else:
        L.append(True)
    return L

n=10
q=0.9

N=10**5 # nb expériences
S=0#somme
for i in range(N):
    S+=nb_analyseA(echantillon(n, q))
print(S/N)

On obtient un résultat proche de 7.5.

```

⊛

(e) Prouver que $\mathbb{E}(A_n) = n + 1 - nq^n$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[A_n] &= 1\mathbb{P}(A_n = 1) + (n + 1)\mathbb{P}(A_n = n + 1) \\
 &= 1q^n + (n + 1)(1 - q^n) \\
 &= n + 1 - nq^n
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[A_n] = n + 1 - nq^n.$$

⊛

(f) On considère un entier naturel k tel que $1 \leq k < n$.

Calculer la probabilité que les k premières personnes testées soient toutes négatives sachant que le résultat de l'analyse du mélange est positif.

RÉPONSE:

Soit n fixé, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note N_i l'événement le test i est négatif. On note G_n "le test groupé des n personnes est positif"
On cherche à calculer

$$\mathbb{P}_{G_n} \left(\bigcap_{i=1}^k N_i \right)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{G_n} \left(\bigcap_{i=1}^k N_i \right) &= \frac{\mathbb{P}(G_n \cap \bigcap_{i=1}^k N_i)}{\mathbb{P}(G_n)} && \text{définition proba conditionnelle} \\
 &= \frac{\mathbb{P} \left(\left(\bigcup_{i=k+1}^n \overline{N_i} \right) \cap \bigcap_{i=1}^k N_i \right)}{\mathbb{P}(G_n)} \\
 &= \frac{\mathbb{P} \left(\bigcup_{i=k+1}^n \overline{N_i} \right) \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^k N_i \right)}{\mathbb{P}(G_n)} && \text{indep, lemme des coalitions} \\
 &= \frac{\left(1 - \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=k+1}^n N_i \right) \right) \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^k N_i \right)}{\mathbb{P}(G_n)} && \text{complémentaire} \\
 &= \frac{\left(1 - \prod_{i=k+1}^n \mathbb{P}(N_i) \right) \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^k N_i \right)}{\mathbb{P}(G_n)} && \text{indépendance} \\
 &= \frac{\left(1 - q^{n-(k+1)+1} \right) q^k}{1 - q^n}
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_{G_n} \left(\bigcap_{i=1}^k N_i \right) = \frac{q^k (1 - q^{n-k})}{1 - q^n}.$$

⊛

2. Dans cette question, on étudie le protocole B , qui consiste à directement analyser individuellement le sang de chacune des n personnes. On pourra noter B_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole B pour n personnes.

(a) À quelle condition sur q fait-on, en moyenne, moins de tests avec le protocole A qu'avec le protocole B ? On exprimera le résultat en fonction de n .

RÉPONSE:

Dans le protocole B on effectue toujours n tests.
On cherche à résoudre l'inéquation

$$\mathbb{E}[A_n] \leq n$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[A_n] \leq n &\Leftrightarrow n + 1 - nq^n \leq n && \text{une question précédente} \\
 &\Leftrightarrow 1 \leq nq^n \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq q^n && \text{car } n > 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \leq q && \text{car } x \mapsto x^{1/n} \text{ est croissante}
 \end{aligned}$$

En moyenne, on fait moins de test avec le protocole A si et seulement si $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq q$.



(b) Étudier les variations et calculer la limite à droite, en 0, de $x \mapsto x^x$.

RÉPONSE:

La fonction $h : x \mapsto \exp(x \ln(x))$ est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad h'(x) = (\ln(x) + 1) \exp(x \ln(x))$$

On en déduit le tableau de variations suivant

x	0	e^{-1}	$+\infty$	
$h'(x)$		-	0	+
h	1		$\frac{1}{e \cdot \frac{1}{e}}$	$+\infty$

La limite en 0 à droite se calcule en remarquant

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$$

et donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \exp(x \ln(x)) = \exp(0)$$



(c) Justifier que, pour n assez grand, l'un des deux protocoles (que l'on déterminera) est préférable à l'autre (c'est-à-dire donne lieu à moins d'analyses en moyenne).

RÉPONSE:

On fixe $q \in]0; 1[$. (intervalle ouvert), d'après ce qui précède

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

il existe donc un rang n_0 à partir duquel

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow q < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Si n est suffisamment grand le protocole B est préférable.



3. Dans cette question, on étudie un procédé « par regroupements » : on mélange le sang des n premières personnes de la population puis l'on teste ce mélange. Si le résultat est négatif, on procède de même avec les n personnes suivantes. Dès lors qu'un groupe de n personnes est testé positivement, on teste alors individuellement les n personnes de ce groupe, jusqu'à trouver la première personne possédant la propriété recherchée. On note G la variable aléatoire représentant le numéro du premier groupe positif. Ainsi, $G = 1$ si c'est le premier groupe qui a donné un test positif, $G = 2$ si c'est le second, etc. On considère k un entier strictement positif.

(a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(G > k)$.

RÉPONSE:

$[G > k] =$ "les k premiers groupes n'incluent aucun test positifs" = "les $k \cdot n$ premiers test sont négatifs"

$$\mathbb{P}(G > k) = q^{k \cdot n}$$



(b) En déduire la loi de G .

RÉPONSE:

$G(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G = k) &= \mathbb{P}(G > k - 1) - \mathbb{P}(G > k) \\ &= q^{(k-1) \cdot n} - q^{k \cdot n} \\ &= (q^n)^{k-1} (1 - q^n) \end{aligned}$$

Le calcul précédent est aussi valable quand $k-1=0$ car $\mathbb{P}(G>0) = 1 = q^{0 \times n}$

G suit la loi géométrique de paramètre q^n .

Remarque : on peut reconnaître directement le modèle d'une loi géométrique "rang d'apparition du premier groupe positif"

Exercice non préparé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On parle de diviseur strict de n pour désigner tout diviseur k de n tel que $1 \leq k < n$. On note s_n la somme des diviseurs stricts de n . On dit que l'entier n est parfait si $s_n = n$.

En Python, la commande `n%k` renvoie le reste de la division de n par k (ce reste est nul si et seulement si k divise n).

1. Écrire une fonction, en langage Python, nommée `s` qui prend en argument un entier n non nul et qui renvoie la somme des diviseurs stricts de n .

RÉPONSE:

```
def s(n):
    S=0
    for i in range(1,n):
        if n%i==0:
            S+=i
    return S
```

2. Écrire une fonction, en langage Python, nommée `prop_parf` qui prend en entrée un entier N et qui renvoie la proportion des nombres n dans l'intervalle $[[1, N]]$ qui sont parfaits.

RÉPONSE:

```
def prop_parf(N):
    nb_succes=0
    for i in range(1,N+1):
        if s(i)==i:
            nb_succes+=1
    return nb_succes/N
```

SUJET 3 : AGRO 2025

Question de cours

Énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales sur un segment.

RÉPONSE:

Soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $]a, b[$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\varphi(]a, b[)$ alors

$$\int_a^b f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$$

Exercice préparé

Tous les vecteurs et toutes les matrices de cet exercice sont à coefficients réels.

1. Soit D une matrice diagonale d'ordre $n \geq 1$ dont les éléments diagonaux sont (d_1, \dots, d_n) .

(a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne. Vérifier que $X^T D X = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2$.

RÉPONSE:

$$DX = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix}$$

donc

$$X^T D X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix}$$

$$X^T DX = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2.$$

✪

- (b) En déduire que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs si et seulement si $X^T DX > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul.

RÉPONSE:

Sens direct Supposons que les coefficients diagonaux de D sont tous strictement positifs, et soit X un vecteur colonne non nul alors

$$X^T DX = \sum_{i=1}^n x_i^2 d_i$$

comme tous les termes de la somme sont positifs, la somme est positive et de plus l'un des coefficients x_{i_0} est non nul comme d_{i_0} donc la somme est non nulle. ce qui prouve que la somme est strictement positive.

Réciproque Supposons que $X^T DX > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose X_i le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient i qui vaut 1.

Ce vecteur colonne vérifie bien les hypothèses et

$$X_i^T DX = 1^2 d_i$$

qui d'après ce que l'on a supposé est strictement positif. ce qui démontre que $d_i > 0$, et ceci est vrai pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs si et seulement si $X^T DX > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul.

✪

2. (a) Écrire une fonction en langage Python nommée f qui prend en entrée une matrice carrée M et qui renvoie $X^T MX$ où X est un vecteur colonne dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$.

RÉPONSE:

```
import numpy as np
import random as rd
```

```
def f(M):
    n,p=np.shape(M)
    X=np.zeros(n)
    for i in range(n):
        X[i]=rd.random()
    return(np.dot(np.transpose(X),np.dot(M,X)))
```

✪

- (b) Écrire un script qui affiche le nombre de fois que l'inégalité $X^T(A-3I)X > 0$ est vérifiée après 100 exécutions de la fonction pour la matrice A ci-dessous (et I la matrice identité de même taille que A).

RÉPONSE:

```
A=np.array([[2,1,1],[1,2,1],[1,1,2]])
M=A-3*np.eye(3)
```

```
nb_succes=0
for i in range(100):
    if f(M)>0:
        nb_succes+=1
print(nb_succes)
```

On obtient des résultats proches de 80.

✪

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère les vecteurs $U_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- (a) Montrer que le vecteur U_1 est un vecteur propre de A et donner la valeur propre associée.

RÉPONSE:

Le vecteur U_1 est non nul et de plus

$$AU_1 = 4U_1$$

U_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4



- (b) Montrer que l'ensemble des vecteurs X tels que $AX = X$ est un sous-espace propre de A et que ce sous-espace propre admet pour base orthonormée (U_2, U_3) .

RÉPONSE:

On cherche une BON de $E_1(A)$ le sous espace propre de la matrice A associé à 1. On constate que $AU_2 = U_2$ et $AU_3 = U_3$ et que ces deux vecteurs sont non nuls donc sont des vecteurs de $E_1(A)$ non proportionnels, donc $\text{Dim } E_1(A) \geq 2$. On sait que $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \text{Dim } E_\lambda(A) \leq 3$ et que $\text{Dim } E_4(A) \geq 1$ donc $\text{Dim } E_1(A) \leq 2$, donc

$\text{Dim } E_1(A) \leq 2$ et U_2, U_3 est une base de $E_1(A)$.

Il est facile de vérifier par le calcul que U_2 et U_3 sont orthogonaux de norme égale à 1.

une base orthonormée de $E_1(A)$ est (U_2, U_3) .



- (c) Déterminer une matrice P et une matrice diagonale D telles que $A = PD^2P^T$ et $P^T P = I$.

RÉPONSE:

$$A = PD^2P^T \text{ avec } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ et } \Delta = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que

$$\Delta = D^2 \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A = PD^2P^T \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- (d) En déduire qu'il existe une matrice inversible L telle que $A = LL^T$.

RÉPONSE:

Comme $D^T = D$, $(PD)^T = DP^T$.

$$A = LL^T \text{ avec } L = PD$$



4. Soit B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- (a) Vérifier que $C = L^{-1}B(L^{-1})^T$ est une matrice symétrique (où L est la matrice définie à la question 3(d)).

En déduire qu'il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B = LQ\Delta(LQ)^T$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned} C^T &= \left(L^{-1}B(L^{-1})^T \right)^T \\ &= \left((L^{-1})^T \right)^T B^T \left(L^{-1} \right)^T && \text{transposée d'un produit} \\ &= L^{-1}B^T \left(L^{-1} \right)^T && \text{double transposée} \\ &= L^{-1}B \left(L^{-1} \right)^T && B \text{ matrice symétrique} \\ &= C \end{aligned}$$

C est une matrice symétrique.

La matrice C étant symétrique réelle, le théorème spectral affirme qu'il existe une matrice Q telle que $Q^T Q = I_3$ et une matrice diagonale Δ telles que

$$C = Q\Delta Q^T$$

donc

$$L^{-1}B(L^{-1})^T = Q\Delta Q^T$$

donc comme $(L^{-1})^T = (L^T)^{-1}$

$$B = LQ\Delta Q^T L^T$$

et donc

$$B = LQ\Delta(LQ)^T.$$



En utilisant les matrices Q et Δ de la question 4(a), on pose $R = LQ$. On a ainsi $B = R\Delta R^T$.

(b) Calculer RR^T .

RÉPONSE:

$$\begin{aligned} RR^T &= LQ(LQ)^T \\ &= LQQ^T L^T \\ &= LI_3 L^T \\ &= LL^T \\ &= A \end{aligned}$$

Q matrice orthogonale

question 3d

$$RR^T = A$$



Exercice non préparé

- Écrire une fonction, en langage Python, nommée `alea` qui prend en argument un entier positif k et renvoie 1 avec la probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ et 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$.

RÉPONSE:

```
import random as rd

def alea(k):
    if rd.random() < (k+1)/(k+2):
        return 1
    else:
        return 0
```



+

- Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe selon les règles suivantes :

- À l'instant $n = 0$, le mobile est au point d'abscisse 0.
- Si à l'instant $n \in \mathbb{N}$, le mobile est au point d'abscisse k , alors à l'instant $n + 1$, il est au point d'abscisse $k + 1$ avec probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ et au point d'abscisse 0 avec probabilité $\frac{1}{k+2}$.

On note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n .

- Écrire une fonction, en langage Python, nommée `simulX` qui prend en entrée un entier naturel n non nul et qui simule n déplacements du mobile et renvoie la valeur de X_n .

```
def simulX(n):
    X=0
    for i in range(n):
        if alea(X)==1:
            X+=1
        else:
            X=0
    return X
```

- Écrire une fonction, en langage Python, nommée `attend` qui ne prend pas d'argument en entrée et qui simule les déplacements du mobile jusqu'au premier retour au point d'abscisse 0 et renvoie le plus petit n strictement positif pour lequel $X_n = 0$.

RÉPONSE:

```

def attend():
    X=alea(0)
    n=1
    while X!=0:
        if alea(X)==1:
            X+=1
        else:
            X=0
        n+=1
    return n

```



SUJET 4 : AGRO 2025

Question de cours

Énoncer le lemme des coalitions.

RÉPONSE:

Programme officiel Soit (X1,...,Xn,Xn+1,...,Xn+p) sont [des variables aléatoires mutuellement] indépendantes, alors u(X1,...,Xn) et v(Xn+1,...,Xn+p) sont indépendantes. On observera que cette propriété peut s'étendre à un nombre fini de fonctions s'appliquant à une partition des variables, et en particulier au cas de (u1(X1),u2(X2),...,un(Xn)).



Exercice préparé

1. On considère les équations différentielles suivantes, d'inconnue y: R -> R :

y'' - 4y' + 5y = 0 (H)

y'' - 4y' + 5y = 2 - e^2x (E)

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (H).

RÉPONSE:

On reconnaît une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2. On pose

r^2 - 4r + 5 = 0 (C)

Cette équation à pour discriminant Δ = 16 - 20 = (2i)^2, donc pour solutions

r1 = 2 - i r2 = 2 + i

L'ensemble des solutions de (H) est {x -> λ cos(x)e^2x + μ sin(x)e^2x / λ ∈ R, v ∈ R}.

On remarque que cet ensemble est Vect(x -> cos(x)e^2x, x -> sin(x)e^2x)



(b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

On pourra chercher une solution particulière y0 de l'équation différentielle

y'' - 4y' + 5y = -e^2x

sous la forme y0 : x -> ce^2x, où c est un réel à déterminer.

RÉPONSE:

On sait trouver une solution constante de

y'' - 4y' + 5y = 2

yH,1 x -> 2/5 convient. Pour l'équation :

y'' - 4y' + 5y = -e^2x

on cherche une solution yH,2 : x -> ce^2x, cette fonction est solution de (E) si et seulement si

forall x in R 4ce^2x - 8e^2x + 5ce^2x = ce^2x

Il suffit donc de choisir c tel que

c = -1

yH,2 : x -> -e^2x

Le principe de superposition nous permet de conclure que yH = yH,1 + yH,2 est solution de (E) et le théorème de structure permet de conclure

L'ensemble des solutions de (E) est {x -> λ cos(x)e^2x + μ sin(x)e^2x + 2/5 - e^2x / λ ∈ R, v ∈ R}

Attention On ne peut pas trouver une famille génératrice de cet ensemble car ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Remarque La correction proposée respecte l'indication de l'énoncé mais on pouvait aussi chercher directement une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a + be^{2x}$.



2. Pour tout réel x , on note $C(x) = \int_0^x e^{2t} \cos(t) dt$ et $S(x) = \int_0^x e^{2t} \sin(t) dt$.

(a) Montrer que, pour tout x réel, $C(x) = \frac{e^{2x} \cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2} S(x)$ et $S(x) = \frac{e^{2x} \sin(x)}{2} - \frac{1}{2} C(x)$.

RÉPONSE:

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, on pose pour $t \in \mathbb{R}0$

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{e^{2t}}{2} & u'(t) &= e^{2t} \\ v(t) &= \cos(t) & v'(t) &= -\sin(t) \end{aligned}$$

Ces deux fonctions sont de classes \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , on peut donc appliquer le théorème d'intégration par partie

$$\begin{aligned} C(x) &= [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t) dt \\ &= \left[\frac{e^{2t} \cos(t)}{2} \right]_0^x + \int_0^x \frac{e^{2t} \sin(t)}{2} dt \\ &= \frac{\cos(x)e^{2x} - 1}{2} + \frac{1}{2} S(x) \end{aligned}$$

$$C(x) = \frac{\cos(x)e^{2x} - 1}{2} + \frac{1}{2} S(x)$$

Le deuxième résultat se démontre de la même manière.



(b) En déduire une primitive de $x \mapsto e^{2x} \cos(x)$ et une primitive de $x \mapsto e^{2x} \sin(x)$ sur \mathbb{R} .

RÉPONSE:

D'après le théorème fondamentale de l'analyse C est une² primitive de $x \mapsto \cos(x)e^{2x}$ et S une primitive de $x \mapsto \sin(x)e^{2x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après la question précédente

$$\begin{cases} C(x) - \frac{1}{2} S(x) &= \frac{\cos(x)e^{2x} - 1}{2} \\ \frac{1}{2} C(x) + S(x) &= \frac{e^{2x} \sin(x)}{2} \end{cases}$$

Donc avec l'opération $L_1 - 2L_1 + L_2$

$$\begin{cases} \frac{5}{2} C(x) &= \frac{2 \cos(x)e^{2x} - 2 + e^{2x} \sin(x)}{2} \\ \frac{1}{2} C(x) + S(x) &= \frac{e^{2x} \sin(x)}{2} \end{cases}$$

En supprimant la constante additive on trouve

Une primitive de $x \mapsto \cos(x)e^{2x}$ est $x \mapsto \frac{2 \cos(x) + \sin(x)}{5} e^{2x}$, une primitive de $x \mapsto \sin(x)e^{2x}$ est $x \mapsto \frac{-\cos(x) + 2 \sin(x)}{5} e^{2x}$.



3. Écrire une fonction en langage Python, nommée `intC`, prenant en paramètres un réel x , et un entier `nb_pas`, qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^x e^{2t} \cos(t) dt$ obtenue à l'aide de la méthode des rectangles. L'intervalle $[0; x]$ doit être découpé en `nb_pas` intervalles de même longueur.

RÉPONSE:

On rappelle une des versions du théorème sur les sommes de Riemann

Théorème 1 (Sommes de Riemann).

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

```
import math as m #fonction cos et exp
```

```
def intC(x, nb_pas):
    def f(t):
        return m.exp(2*t)*m.cos(t)
```

2. plus précisément l'unique primitive qui s'annule en 0

```

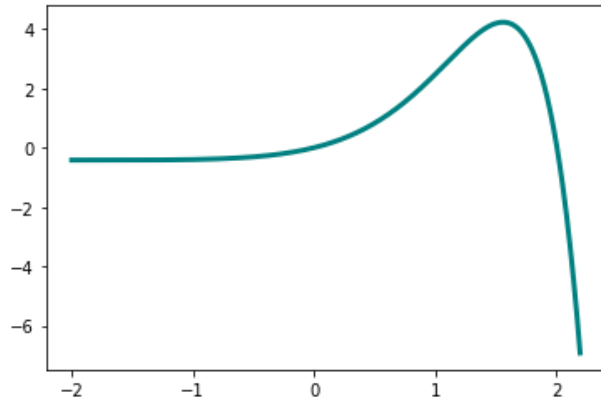
pas =x/nb_pas
t=0
S=0
for i in range(nb_pas):
    S+=f(t)
    t+=pas
return S*pas

#non demandé
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
X=np.linspace(-2,2.2,10**4)
Y= [ intC(x,10**2) for x in X]

plt.plot(X,Y,color="teal",linewidth=3)

plt.plot()

```



Remarques.

- Ce résultat est valable même si $b < a$.
- Dans le programme n est remplacé par nb_pas qui doit être choisi suffisamment grand pour obtenir une bonne estimation de la limite.
- Pour éviter de faire trop de calcul, et d'accumuler les erreurs dues aux approximations, on ne multiplie par $\frac{b-a}{n}$ qu'à la fin, on calcule une seule fois la valeur $\frac{b-a}{n}$ et on remarque que $a + (k+1)\frac{b-a}{n} = a + k\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n}$.
- Tracer le graphe n'est pas demandé dans l'énoncé.



Dans toute la suite, on note E l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On considère les quatre fonctions suivantes de E :

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto e^{2x}, \quad f_3 : x \mapsto e^{2x} \cos(x), \quad f_4 : x \mapsto e^{2x} \sin(x),$$

On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

4. Montrer que \mathcal{B} est une base de F .

RÉPONSE:

Par définition \mathcal{B} est une famille génératrice de l'espace vectoriel qu'elle engendre, comme on ne connaît pas la dimension de F , nous allons montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 des réels tels que

$$0 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4$$

c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 = \lambda_1 + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 \cos(x) e^{2x} + \lambda_4 \sin(x) e^{2x}$$

Or, on sait que le produit d'une fonction bornée et d'une fonction de limite nulle est de limite nulle donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \lambda_1 + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 \cos(x) e^{2x} + \lambda_4 \sin(x) e^{2x} = \lambda_1 = 0$$

on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 = \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 \cos(x) e^{2x} + \lambda_4 \sin(x) e^{2x}$$

et donc comme une exponentielle n'est jamais nulle

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 = \lambda_2 + \lambda_3 \cos(x) + \lambda_4 \sin(x)$$

En choisissant $x = 0, x = \pi/2$ et $x = \pi$ on obtient

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Système facile à résoudre qui n'a pas de solution autre que la solution nulle. Cela démontre que la famille est libre

\mathcal{B} est une base de F .



5. On note u l'application définie sur F par $u(f) = f'$ pour tout $f \in F$.

(a) Montrer que u est linéaire.

RÉPONSE:

Soit f et g deux fonctions de E donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et λ un réel³

$$\begin{aligned} u(f + \lambda g) &= (f + \lambda g)' && \text{définition de } u \\ &= f' + \lambda g' && \text{propriétés de la dérivation} \\ &= u(f) + \lambda u(g) && \text{définition de } u \end{aligned}$$

u est une application linéaire.



(b) Calculer l'image par u de f_1, f_2, f_3 et f_4 .

RÉPONSE:

Un calcul immédiat donne

$u(f_1) = 0, u(f_2) = 2f_2, u(f_3) = 2f_3 - f_4$ et $u(f_4) = f_3 + 2f_4$.



(c) En déduire que u est un endomorphisme de F , et déterminer la matrice représentative A de l'endomorphisme u dans la base \mathcal{B} .

RÉPONSE:

Comme l'image de \mathcal{B} par u est composée de vecteurs de \mathcal{B} , on peut conclure

u est un endomorphisme de F .

Les calculs précédents permettent de montrer que

la matrice représentative de u dans \mathcal{B} est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Le cours de première année montre que $f + \lambda g$ est aussi de classe \mathcal{C}^∞ ce qui permet de montrer que E est bien un \mathbb{R} espace-vectoriel.



6. Résoudre l'équation $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi? Justifier.

RÉPONSE:

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & = 0 \\ 2y & = 0 \\ 2z + t & = 1 \\ -z + 2t & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = 0 \\ z & = \frac{2}{5} \\ t & = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Les solutions de cette équation sont les matrices $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Soit f une fonction de F et X sa matrice colonne représentative dans la base \mathcal{B} . On sait que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u(f))$$

Nous venons de résoudre l'équation matricielle

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u(f)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_3)$$

Ce qui revient à résoudre dans F

$$f' = f_3$$

C'est à dire trouver les primitives de f_3 dans F .

Les primitives de f_3 sont les fonctions $c + \frac{2}{5}f_3 + \frac{1}{5}f_4$ où c est une constante.

Remarques Ce procédé nous donne les primitives de $x \mapsto \exp(2x)\cos(x)$ dans F , il pourrait exister d'autres primitives, mais les théorèmes d'analyse nous permet d'affirmer que deux primitives d'une fonction continue sur un intervalle ne diffère que d'une constante additive. Nous avons donc trouvé toutes les primitives



7. Résoudre l'équation $(A^2 - 4A + 5I_4)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi? Justifier.

RÉPONSE:

Après calcul

$$A^2 - 4A + 5I_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions de l'équation $(A^2 - 4A + 5I_4)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont les matrices $\begin{pmatrix} 2/5 \\ -1 \\ c \\ d \end{pmatrix}$ où c et d sont des constantes réelles.

En utilisant les résultats du cours

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^2 - 4u + 5Id_F) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^2) - 4\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) + 5\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Id_F) = A^2 - 4A + 5I_4$$

Nous venons donc de résoudre dans F l'équation d'inconnue f

$$f'' - 4f' + 5f = 2f_1 - f_2$$

C'est à dire l'équation différentielle de la question 1.

Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto \frac{2}{5} - \exp(2x) + c \cos(x) \exp(2x) + d \sin(x) \exp(2x)$ où c et d sont des constantes réelles.

Remarque Nous avons résolu cette équation différentielle en cherchant des solutions dans f , mais les théorèmes du cours sur les équations différentielles (première année) nous permettent d'affirmer qu'il n'existe pas d'autre solutions définies sur \mathbb{R}



Exercice non préparé

On appelle vecteurs creux des vecteurs de très grande dimension, dont la grande majorité des coordonnées sont nulles. Pour coder un vecteur creux, on utilise une liste de deux listes, celle de ses coordonnées non nulles et celle des indices correspondants triée par ordre croissant, suivies de la taille du vecteur.

Ainsi, le vecteur de \mathbb{R}^9 ; $[1, 0, 3, 0, 0, 0, -1, 0]$ est représenté par $[[1, 3, -1], [0, 2, 7], 9]$. Les vecteurs usuels sont, eux, codés par des vecteurs numpy.

1. Écrire une fonction `coder` renvoyant la représentation creuse d'un vecteur. Écrire une fonction `decoder` faisant le travail inverse. Par exemple :

- `coder` $([1, 0, 3, 0, 0, 0, -1, 0])$ doit renvoyer $[[1, 3, -1], [0, 2, 7], 9]$
- `decoder` $([[1, 3, -1], [0, 2, 7], 9])$ doit renvoyer $[1, 0, 3, 0, 0, 0, -1, 0]$

RÉPONSE:

```
def coder(L):
    Liste_indice=[]
    Liste_valeur=[]
    n=len(L)
    for i in range(n):
        if L[i]!=0:
            Liste_indice.append(i)
            Liste_valeur.append(L[i])
    return [Liste_valeur,Liste_indice,n]
```

```
def decoder(L):
    Lv=L[0] #liste valeurs
    Li=L[1] #liste indices
    n=L[2] #longueur
    LR=[0]*n

    for k in range(len(Li)):
        LR[Li[k]]=Lv[k]
    return LR
```

✳

Pour de tels vecteurs, il serait trop coûteux, tant en temps qu'en mémoire, d'écrire toutes les coordonnées nulles et de calculer comme habituellement dans \mathbb{R}^n . C'est pourquoi on utilise le codage de la question précédente.

- Écrire une fonction `prod_scal(V1, V2)` prenant en argument deux vecteurs creux appartenant au même espace \mathbb{R}^n , codés comme dans la première question et qui calcule leur produit scalaire. Il n'est pas autorisé de repasser par la forme usuelle en décodant V1 et V2.

RÉPONSE:

```
def prod_scal(V1,V2):
    PS=0
    Lv1,Li1,n1=V1[0],V1[1],V1[2]
    Lv2,Li2,n2=V2[0],V2[1],V2[2]
    for k in range(len(Li1)):
        if Li1[k] in Li2:
            j=Li2.index(Li1[k])
            PS+=Lv1[k]*Lv2[j]
    return PS

def prod_scal2(V1,V2):
    PS=0
    Lv1,Li1,n1=V1[0],V1[1],V1[2]
    Lv2,Li2,n2=V2[0],V2[1],V2[2]
    i=0
    j=0
    while i<len(Li1) and j<len(Li2):
        if Li1[i]<Li2[j]:
            i+=1
        elif Li1[i]>Li2[j]:
            j+=1
        else:
            PS+=Lv1[i]*Lv2[j]
            i+=1
```

```
        j+=1
    return PS
```

✳

SUJET 5 : AGRO 2025

Question de cours

Donner la définition de $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$, où pour tout entier naturel n , A_n est un ensemble.

RÉPONSE:

$$x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \text{ si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N} \quad x \in A_n$$

✳

Exercice préparé

- Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = xf(x).$$

- Représenter en Python sur un même graphe les fonctions f et g sur l'intervalle $[-2; 2]$.

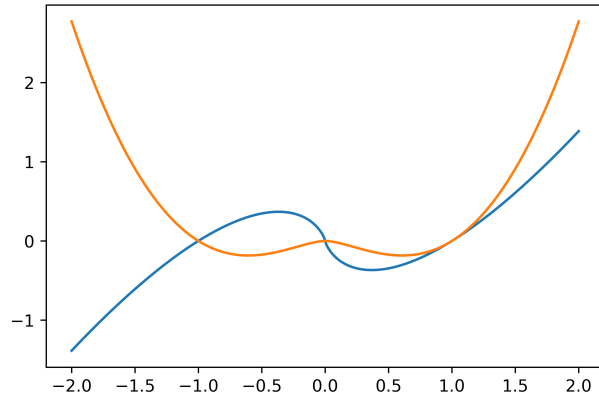
RÉPONSE:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    if x!=0:
        return x*np.log(np.abs(x))
    else:
        return 0
```

```
def g(x):
    return x*f(x)

X=np.linspace(-2,2,10**5)
Yf=[f(x) for x in X]
Yg=[g(x) for x in X]
plt.plot(X,Yf)
plt.plot(X,Yg)
plt.show()
```



⊛

(b) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

RÉPONSE:

Par composée et produit de fonctions usuelles, f est continue sur $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$. Le théorème des croissances comparées permet d'affirmer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0 = f(0)$$

donc f est continue en 0

f est continue sur \mathbb{R}

⊛

(c) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et exprimer $g'(x)$ pour tout réel x .

RÉPONSE:

g est continue sur \mathbb{R} comme produit de fonctions continues sur \mathbb{R} .
 g est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$ comme produit de fonctions de classe \mathcal{C}^1 .
 On commence par remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \text{abs}'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g'(x) = \begin{cases} 2x \ln |x| - \frac{x^2}{|x|} & \text{si } x < 0 \\ 2x \ln |x| + \frac{x^2}{|x|} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et on remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g'(x) = 2x \ln |x| + x$$

Pour x non nul

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = f(x)$$

donc d'après la question précédente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_0 f = 0$$

g est donc dérivable en 0. et on vérifie aisément que

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0 = g'(0)$$

g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

⊛

(d) La fonction g est-elle de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} ?

RÉPONSE:

pour $x \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = \frac{2x \ln |x| + x - 0}{x - 0} = 1 + 2 \ln |x|$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = -\infty$$

g' n'est pas dérivable en 0

g n'est pas de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .



2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $f_0 : x \mapsto 1, f_1 : x \mapsto x$ et la fonction f définie à la question 1 :

$$F = \text{Vect}(f_0, f_1, f)$$

Prouver que la famille (f_0, f_1, f) est une base de F .

RÉPONSE:

Par définition famille (f_0, f_1, f) est une famille génératrice de F .
Soit α, β et γ trois réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha f_0(x) + \beta f_1(x) + \gamma f(x) = 0$$

cela implique que

$$\begin{cases} \alpha + 0 + 0 = 0 & \text{en } x = 0 \\ \alpha + \beta + 0 = 0 & \text{en } x = 1 \\ \alpha + \beta 2 + \gamma 2 \ln(2) = 0 & \text{en } x = 2 \end{cases}$$

Comme $2 \ln(2) \neq 0$ le système est échelonné et donc

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille (f_0, f_1, f) est libre

la famille (f_0, f_1, f) est une base de F .



3. Pour toute fonction φ de F , on note $\Phi(\varphi)$ la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x\varphi(x)$.

(a) Montrer que l'application $\Phi : \varphi \mapsto \Phi(\varphi)$ est linéaire.

RÉPONSE:

Soit φ et ψ deux fonctions de F et λ un réel. Pour x réel

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda\varphi + \psi)(x) &= (f_1(\lambda\varphi + \psi))'(x) \\ &= (\lambda f_1\varphi + f_1\psi)'(x) \\ &= \lambda(f_1\varphi)'(x) + (f_1\psi)'(x) \\ &= \lambda\Phi(\varphi)(x) + \Phi(\psi)(x) \end{aligned}$$

$\Phi : \varphi \mapsto \Phi(\varphi)$ est linéaire.



(b) Vérifier que $\Phi(f_0) = f_0, \Phi(f_1) = 2f_1$ et calculer $\Phi(f)$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned} \Phi(f_0) &= (x \mapsto 1x)' = x \mapsto 1 = f_0 \\ \Phi(f_1) &= (x \mapsto xx)' = x \mapsto 2x = 2f_1 \end{aligned}$$

et la première question donne

$$\Phi(f) = g' = 2f + f_1$$

$$\Phi(f) = g' = 2f + f_1$$



(c) En déduire que Φ est un endomorphisme de F et préciser sa matrice M dans la base (f_0, f_1, f) de F .

RÉPONSE:

On constate que

$$\Phi(f_0) \in F \quad \Phi(f_1) \in F \quad \Phi(f) \in F$$

Donc

Φ est un endomorphisme de F et sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.



(d) L'endomorphisme Φ est-il bijectif de F vers F ? Si oui, préciser la matrice de Φ^{-1} dans la base (f_0, f_1, f) .

RÉPONSE:

La matrice de Φ est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nul et donc elle est inversible.

Φ est bijectif de F vers F .

La matrice de Φ^{-1} dans la base (f_0, f_1, f) est l'inverse de la matrice trouvée précédemment.

La matrice de Φ^{-1} dans la base (f_0, f_1, f) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.



(e) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable?

RÉPONSE:

La matrice est A triangulaire donc les valeurs propres se lisent sur la diagonale

$$\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$$

Après calculs on trouve

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

donc

$$\dim E_1(A) + \dim E_2(A) < 3$$

donc A n'est pas diagonalisable donc :

Φ n'est pas diagonalisable



Exercice non préparé

Le candidat pourra choisir de représenter les matrices sous la forme d'une liste de listes ou sous la forme d'un array NumPy.

- Écrire une fonction `somme_ligne(M, i)` qui renvoie la somme des éléments de la ligne i de la matrice carrée M et une fonction `somme_colonne(M, j)` qui renvoie la somme des éléments de la colonne j de la matrice carrée M .

RÉPONSE:

version numpy

```
import numpy as np
def somme_ligne(M,i):
    n,p=np.shape(M)
    S=0
    for j in range(p):
        S+=M[i,j]
    return S

def somme_colonne(M,j):
    n,p=np.shape(M)
    S=0
    for i in range(n):
        S+=M[i,j]
    return S
```

Exemple d'utilisation

```
M=np.array([[1,20],[1,-1],[1,2]])
print(somme_colonne(M, 1))
print(somme_ligne(M, 2))
```

version liste

```

def somme_ligne(M,i):
    n=len(M)
    p=len(M[0])
    S=0
    for j in range(p):
        S+=M[i][j]
    return S

def somme_colonne(M,j):
    n=len(M)
    p=len(M[0])
    S=0
    for i in range(n):
        S+=M[i][j] #syntaxe !
    return S

```

Exemple d'utilisation

```

M=[[1,20],[1,-1],[1,2]]
print(somme_colonne(M, 1))
print(somme_ligne(M, 2))

```



On dit qu'une matrice M est une matrice magique si la somme de chaque ligne et la somme de chaque colonne de M sont toutes égales.

Exemple : $\begin{pmatrix} 11 & 15 & 19 \\ 21 & 7 & 17 \\ 13 & 23 & 9 \end{pmatrix}$ est une matrice magique car la somme de chaque ligne et de

chaque colonne fait 45

et $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 1 & 15 & 9 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice magique car la somme de la première colonne fait 8

et celle de la deuxième colonne fait 16 .

2. En déduire une fonction `est_magique(M)` qui renvoie le booléen `True` si la matrice carrée M est magique et `False` sinon.

RÉPONSE:

Version numpy

```

import numpy as np
def est_magique(M):
    n,p=np.shape(M)
    S=somme_colonne(M, 0)

```

```

    for j in range(1,p):
        if S!=somme_colonne(M, j):
            return False
    for i in range(n):
        if S!=somme_ligne(M, i):
            return False

    return True

```

Exemple d'utilisation

```

M=np.array([[11,15,19],[21,7,17],[13,23,9]])
N=np.array([[7,1,6],[1,15,9]])

```

```

print(est_magique(M),est_magique(N))

```

Version liste

```

import numpy as np
def est_magique(M):
    n=len(M)
    p=len(M[0])
    S=somme_colonne(M, 0)
    for j in range(1,p):
        if S!=somme_colonne(M, j):
            return False
    for i in range(n):
        if S!=somme_ligne(M, i):
            return False

    return True

```

Exemple d'utilisation

```

M=[[11,15,19],[21,7,17],[13,23,9]]
N=[[7,1,6],[1,15,9]]

```

```

print(est_magique(M),est_magique(N))

```

