

PRÉPARATIONS AUX ÉPREUVES ORALES

SUJET 1 : AGRO 2023

Question de cours

Énoncer le théorème de transfert dans le cas d'une variable aléatoire admettant une densité.

Exercice préparé

Pour tout $n \geq 1$. On considère la matrice $K_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(K_n)_{i,i+1} = i$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(K_n)_{j+1,j} = -n - 1 + j$ et dont tous les autres coefficients sont nuls. On a donc :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de K_1 . Cette matrice est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ? Sur \mathbb{C} ?

RÉPONSE:

Les valeurs propres de K_1 sont i et $-i$.

Cette matrice réelle n'admet aucune valeur propre réelle, elle n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} , elle admet deux valeurs propres complexes distinctes, elle est donc diagonalisable dans \mathbb{C} .

- Écrire une fonction K en Python qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la matrice K_n .

RÉPONSE:

```
import numpy.linalg as la
import numpy as np
def K(n):
    M=np.zeros([n+1,n+1])
    for i in range(0,n): # attention décalage
        M[i][i+1]=i+1

    for j in range(0,n):
        M[j+1][j]=-n-1+j+1
    return M
```

Remarque : Le module numpy autorise deux syntaxes pour accéder à l'élément en position i, j

- $M[i][j]$ c'est aussi la syntaxe utilisée lors qu'une matrice est représentée par une liste de liste.
- $M[i, j]$ syntaxe proche de celle utilisée en mathématiques



- Utiliser la fonction précédente et la fonction `eigvals` du module `numpy.linalg` pour déterminer les valeurs propres de K_n pour $n \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$. Que peut-on conjecturer?

RÉPONSE:

```
for n in range(1,11):
    print(la.eigvals(K(n)))
```

Qui affiche

```
[0.+1.j 0.-1.j]
[-4.44089210e-16+2.j -4.44089210e-16-2.j 2.35304824e-16+0.j]
[2.79049656e-104+3.j 2.79049656e-104-3.j 1.11022302e-016+1.j
1.11022302e-016-1.j]
[ 2.16840434e-19+4.j 2.16840434e-19-4.j -5.20527246e-28+0.j
0.00000000e+00+2.j 0.00000000e+00-2.j]
[-1.11022302e-16+5.j -1.11022302e-16-5.j 2.22044605e-16+3.j
2.22044605e-16-3.j -6.74700668e-80+1.j -6.74700668e-80-1.j]
[-4.85722573e-16+6.j -4.85722573e-16-6.j 0.00000000e+00+4.j
0.00000000e+00-4.j 4.15387251e-21+0.j 0.00000000e+00+2.j
0.00000000e+00-2.j]
[ 0.00000000e+00+7.j 0.00000000e+00-7.j -2.22044605e-16+5.j
-2.22044605e-16-5.j 0.00000000e+00+1.j 0.00000000e+00-1.j
-2.22044605e-16+3.j -2.22044605e-16-3.j]
[ 1.66533454e-16+8.j 1.66533454e-16-8.j 7.77156117e-16+6.j
7.77156117e-16-6.j 0.00000000e+00+4.j 0.00000000e+00-4.j
5.02046287e-20+0.j -1.11022302e-16+2.j -1.11022302e-16-2.j]
[-7.77156117e-16+9.j -7.77156117e-16-9.j 4.44089210e-16+7.j
```

4.44089210e-16-7.j -8.88178420e-16+5.j -8.88178420e-16-5.j
 1.11022302e-16+1.j 1.11022302e-16-1.j 2.22044605e-16+3.j
 2.22044605e-16-3.j]
 [5.55111512e-16+10.j 5.55111512e-16-10.j 0.00000000e+00 +8.j
 0.00000000e+00 -8.j 4.44089210e-16 +6.j 4.44089210e-16 -6.j
 -3.33066907e-16 +4.j -3.33066907e-16 -4.j 9.81704710e-20 +0.j
 0.00000000e+00 +2.j 0.00000000e+00 -2.j]

Pour bien interpréter le résultat il faut

- Se rappeler que la notation j des physiciens est utilisée pour un nombre i vérifiant $i^2 = -1$.
- Les calculs donnent des valeurs approchées, il faut bien faire attention aux puissances de 10 très négatives.

Il semblerait que

- (a) $\text{Sp}(K_1) = \{-i, i\}$
- (b) $\text{Sp}(K_2) = \{-2i, 0, 2i\}$
- (c) $\text{Sp}(K_3) = \{-3i, -i, i, 3i\}$
- (d) $\text{Sp}(K_n) = \{-ni, \dots, -(n-2)i, \dots, ni\}$



4. On se propose de montrer la conjecture faite dans la question précédente. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{C} et V_n le \mathbb{C} -sous-espace vectoriel engendré par la famille de fonctions $\mathcal{B}_n = (f_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \cos^{n-k}(x) \sin^k(x)$$

On considère l'application φ_n définie pour tout $f \in V_n$ par $\varphi_n(f) = f'$

- (a) Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $x \in]-\pi/2; \pi/2[$. Montrer que

$$\lambda_0 f_0(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lambda_0 + \lambda_1 \tan(x) + \dots + \lambda_n \tan(x)^n = 0$$

RÉPONSE:

Il suffit de multiplier ou de diviser par $\cos^n(x)$ qui n'est jamais nul sur l'intervalle $]-\pi/2; \pi/2[$



- (b) En déduire que la famille \mathcal{B}_n est une base de V_n et la dimension de V_n .

RÉPONSE:

Par définition la famille \mathcal{B}_n est une famille génératrice de V_n .
 Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des complexes tels que

$$\forall x \in]-\pi/2; \pi/2[\quad \lambda_0 f_0(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0$$

D'après la question précédente cela implique

$$\forall x \in]-\pi/2; \pi/2[\quad \lambda_0 + \lambda_1 \tan(x) + \dots + \lambda_n \tan(x)^n = 0$$

Comme \tan induit une bijection de $]-\pi/2; \pi/2[$ dans \mathbb{R} on obtient

$$\forall X \in \mathbb{R} \quad \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_n X^n = 0$$

La fonction polynomiale est nulle donc tous coefficients sont nuls

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$$

On a donc montré que la famille \mathcal{B}_n est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

La famille \mathcal{B}_n est une base de V_n et la dimension de V_n est $n+1$.

Remarque : on peut aussi utiliser un argument qui utilise le nombre maximum de racine pour un polynôme de degré fixé.



- (c) Montrer que φ_n est un endomorphisme de V_n et déterminer sa matrice dans la base \mathcal{B}_n .

RÉPONSE:

D'après le cours de terminale φ est une application linéaire
 On calcule aussi que

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad \varphi(f_k) = -(n-k)f_{k+1} + kf_{k-1}$$

$$\varphi(f_0) = -f_1 \quad \varphi(f_n) = nf_{n-1}$$

Remarque : on peut écrire

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \varphi(f_k) = -(n-k)f_{k+1} + kf_{k-1}$$

en considérant que $0f_{-1} = 0$ est la fonction nulle

On constate que l'image de tous les vecteurs de \mathcal{B}_n sont dans V_n ce qui implique, pour une application linéaire que l'image de tous vecteur de V_n est dans V_n

φ est un endomorphisme de V_n

Les calculs précédents permettent d'affirmer que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = K_n$$

✪

(d) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on note g_k la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \exp(i(n-2k)x)$$

Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = (\cos(x) + i \sin(x))^{n-k} (\cos(x) - i \sin(x))^k$.

RÉPONSE:

Soit x réel

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \exp(i(n-2k)x) \\ &= \exp(i(n-k)x) \exp(-ikx) \\ &= (\exp(ix))^{n-k} (\exp(-ix))^k \\ &= (\cos x + i \sin x)^{n-k} (\cos(-x) + i \sin(-x))^k && \text{Moivre} \\ &= (\cos x + i \sin x)^{n-k} (\cos(x) - i \sin(x))^k && \text{parités de sin et cos} \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos(x) + i \sin(x))^{n-k} (\cos(x) - i \sin(x))^k.$$

✪

(e) En déduire que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, g_k appartient à V_n . *Indication* : On pourra utiliser sans le justifier que $\left(\sum_{j=0}^{n-k} a_j \right) \left(\sum_{l=0}^k b_l \right) = \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{l=0}^k a_j b_l$.

RÉPONSE:

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ fixé (les deux autres cas ressemblent à celui ci) pour x réel fixé

$$\begin{aligned} g_k(x) &= (\cos(x) + i \sin(x))^{n-k} (\cos(x) - i \sin(x))^k \\ &= \left[\sum_{\ell=0}^{n-k} \lambda_{\ell} \cos^{n-k-\ell}(x) \sin^{\ell}(x) \right] \left[\sum_{h=0}^k \mu_h \cos^{k-h}(x) \sin^h(x) \right] && \text{coefficients issus du Binôme de Newton} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-k} \sum_{h=0}^k \lambda_{\ell} \mu_h \cos^{n-(\ell+h)}(x) \sin^{\ell+h}(x) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-k} \sum_{h=0}^k \lambda_{\ell} \mu_h f_{h+\ell} \end{aligned}$$

On a donc démontré que g_k est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille \mathcal{B}_n .

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, g_k appartient à V_n .

Remarque : Il n'est pas nécessaires d'exprimer les coefficients dans les sommes précédentes, seul est pertinent le fait qu'ils soient complexes

✪

(f) En déduire les valeurs propres de φ_n puis celle de K_n .

RÉPONSE:

Soit k fixé

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g_k(x) = \cos((n-2k)x) + i \sin((n-2k)x)$$

On calcule¹

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'_k(x) = (n-2k) (-\sin((n-2k)x) + i \cos((n-2k)x))$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'_k(x) = i(n-2k) (i \sin((n-2k)x) + \cos((n-2k)x))$$

et finalement

$$\varphi(g_k) = (n-2k)g_k$$

g_k n'étant pas la fonction nulle

$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, g_k est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $(n-2k)$

On a trouvé $n+1$ valeurs propres (complexes) distinctes deux à deux et φ est endomorphisme d'un espace de dimension $n+1$, il ne peut pas y en avoir d'autres.

$$\text{sp}(\varphi) = \text{sp}(K_n) = \{(n-2k)i / k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

1. On peut aussi prolonger à l'exponentielle complexe les règles de calculs connues



(g) La matrice K_n est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ?

RÉPONSE:

Oui car $K_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ et elle admet $n+1$ valeurs propres distinctes deux à deux



(h) Déterminer pour quelle valeur de n , la matrice K_n est inversible.

RÉPONSE:

Une matrice est inversible si et seulement si 0 n'est pas une de ses valeurs propres.

K_n est inversible si et seulement si n est impaire



(i) Lorsque K_n n'est pas inversible, déterminer une base du noyau.

RÉPONSE:

Si n est impaire $n = 2\ell$ alors la matrice n'est pas inversible est une base du noyau est formé par un vecteur propre de K_n associé à la valeur propre 0, c'est la matrice des coordonnées de g_ℓ c'est à dire la matrice colonne de taille $n+1$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en ligne ℓ qui vaut 1.



SUJET 2 : AGRO 2023

Question de cours

Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire $f : E \rightarrow F$.

Exercice préparé

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

RÉPONSE:

En écrivant

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

et sachant que

$$\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$$

on obtient

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1$$

puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1$$

par continuité de l'exponentielle

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e^{-1}$$



On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on effectue n tirages successifs d'une boule avec remise. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de numéros distincts obtenus.

2. Déterminer la loi de X dans les cas $n = 2$ et $n = 3$. Que vaut l'espérance de X dans les cas $n = 2$ et $n = 3$?

RÉPONSE:

Si $n = 2$ $X(\Omega) = \{1, 2\}$ il y a 4 tirages possibles (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) par dénombrement

$$\text{Si } n = 2, X(\Omega) = \{1, 2\} \text{ et } \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}, E(X) = \frac{3}{2}$$

Si $n = 3$, $X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$

Il y a $3^3 = 27$ tirages possibles.

- trois tirages (1,1,1), (2,2,2) et (3,3,3) donnent un résultat égal à 1
- 3! tirages donnent un résultat égal à 3 (permutations)

- le reste $27 - 3 - 6 = 18$ donnent un résultat égal à 2

$$\text{Si } n=3 \text{ alors } \mathbb{P}(X=1) = \frac{3}{27} \quad \mathbb{P}(X=2) = \frac{19}{27} \quad \mathbb{P}(X=3) = \frac{6}{27}, \quad E(X) = \frac{59}{27}$$

3. (a) Ecrire une fonction Python d'argument n qui simule l'expérience et renvoie la liste des numéros tirés.

RÉPONSE:

```
import random as rd

def simul(n):
    return [rd.randint(1,n) for i in range(n)]
```

- (b) Ecrire une fonction Python d'argument n qui simule la variable X .
On pourra obtenir l'ensemble des valeurs d'une liste L avec la commande `set(L)` et obtenir le cardinal d'un ensemble s avec la commande `len(s)`.

RÉPONSE:

```
def X(n):
    return (len(set(simul(n))))
```

- (c) Ecrire une fonction Python d'argument n qui calcule une valeur approchée de l'espérance de X .

RÉPONSE:

```
def moyenne(n,N=10**5):
    S=0
    for i in range(N):
        S+=X(n)
    return S/N
```

4. Calculer :

- (a) $P(X=1)$

RÉPONSE:

Il y a n^n tirages au total dont n tirages où tous les numéros sont identiques

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{n^{n-1}}$$

- (b) $P(X=n)$

RÉPONSE:

Un tirage où les n numéros sont différents est une permutation, il y en a $n!$

$$\mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{(n-1)!}$$

- (c) $P(X=2)$

RÉPONSE:

- On commence par choisir les deux numéros qui apparaissent $\binom{n}{2}$ possibilités
- Il y a 2^n tirages qui ne contiennent que ces numéros
- Parmi ceux-ci il faut retirer les 2 qui ne contiennent qu'un numéro,

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{n}{2}(2^n - 2)}{n^n}$$

(d) $P(X = n - 1)$

RÉPONSE:

- On choisit le numéro qui n'apparaît pas n possibilités
- On choisit le numéro qui apparaît deux fois $n - 1$ possibilités, les autres numéros apparaissent une fois
- On choisit le rang d'apparition du numéro double $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ possibilités
- On choisit le rang d'apparition des $n - 2$ autres numéros $(n - 2)!$
- Il y a donc $\frac{n(n-1)}{2} n!$ possibilités

$$\mathbb{P}(X = n - 1) = \frac{\frac{n(n-1)}{2} n!}{n^n}$$

✪

5. Pour i entre 1 et n , on note A_i l'événement "le numéro i fait partie des numéros obtenus au cours des n tirages" et on note X_i la variable indicatrice de l'événement A_i (X_i prend la valeur 1 si A_i est réalisé et 0 sinon).

(a) Calculer la loi de X_i et son espérance.

RÉPONSE:

Soit i fixé dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, X_i prend pour valeurs 0 et 1. Elle suit donc une loi de Bernoulli dont il faut Calculer le coefficient. $[X_i = 0]$ est réalisé si et seulement si aucun des tirages n'amène le résultats i . Il y a $(n - 1)^n$ tirages qui n'amène jamais i .

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{(n-1)^n}{n^n}$$

$$X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right) \text{ et } E(X_i) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

✪

(b) Calculer l'espérance de X ainsi qu'un équivalent de $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

On constate

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n ne sont pas indépendantes mais on peut utiliser la linéarité de l'espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$$E(X) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)$$

$$E(X) = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) \\ = n \left(1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

Or

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$$

donc

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)\right) = 1 - e^{-1}$$

Comme ce réel est non nul

$$E(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n(1 - e^{-1})$$

✪

6. (a) Pour i et j distincts entre 1 et n , calculer la loi de la variable $X_i X_j$.

RÉPONSE:

$X_i X_j$ suit une loi de Bernoulli.

$$\mathbb{P}(X_i X_j = 0) = \mathbb{P}([X_i = 0] \cup [X_j = 0]) = \mathbb{P}(X_i = 0) + \mathbb{P}(X_j = 0) - \mathbb{P}(X_i = 0, X_j = 0)$$

$[X_i = 0] \cap [X_j = 0]$ se réalise si et seulement si les numéros i et j ne sont jamais tirés

$$\mathbb{P}(X_i = 0, X_j = 0) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$$

$$\text{Si } i \neq j, X_i X_j \rightsquigarrow \mathcal{B} \left(1 - 2 \left(\frac{n-1}{n} \right)^n + \left(\frac{n-2}{n} \right)^n \right) \text{ et } E(X_i) = 1 - 2 \left(\frac{n-1}{n} \right)^n + \left(\frac{n-2}{n} \right)^n$$

✪

(b) Calculer la variance de X .

RÉPONSE:

Pour $i \neq j$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j) &= E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) && \text{KH} \\ &= 1 - 2 \left(\frac{n-1}{n} \right)^n + \left(\frac{n-2}{n} \right)^n - \left(1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \right)^2 \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} V(X) &= V \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= nV(X_1) + 2 \binom{n}{2} \left(1 - 2 \left(\frac{n-1}{n} \right)^n + \left(\frac{n-2}{n} \right)^n - \left(1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \right)^2 \right) \end{aligned}$$

✪

$$V(X) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \right) \left(\frac{n-1}{n} \right)^n + 2 \binom{n}{2} \left(1 - 2 \left(\frac{n-1}{n} \right)^n + \left(\frac{n-2}{n} \right)^n - \left(1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \right)^2 \right)$$

SUJET 3 : AGRO 2023

Question de cours

Lien(s) entre l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes et leur covariance.

Exercice préparé

1. On considère φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 , dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que le spectre de l'endomorphisme φ est : $Sp(\varphi) = \{1, 3\}$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

(b) On note $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 0, 1)$ et $a_3 = (1, -1, 0)$.

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base \mathcal{B} .

(c) Déterminer une matrice carrée P telle que $A = PMP^{-1}$ et expliciter P^{-1} à l'aide de la fonction `inv` de Python. La commande `inv` du module `linalg` de la bibliothèque `numpy` permet de calculer l'inverse d'une matrice carrée de type `matrix`.

2. Soient f, g et h trois fonctions dérivables sur \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(t) = 2f(t) + g(t) + h(t) \\ g'(t) = f(t) + 2g(t) + h(t) \text{ et } f(0) = g(0) = h(0) = 1 \\ h'(t) = 3h(t) \end{cases}$$

(a) Déterminer l'expression de $h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis tracer à l'aide de Python l'allure de la courbe représentative de h sur l'intervalle $[0; 1]$.

(b) On note $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$.

$$\text{On note } Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \text{ et } Y'(t) = P^{-1}X'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}.$$

Vérifier qu'on a : $\forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = 3u(t) + e^{3t}$.

(c) En déduire l'expression de $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(d) Déterminer alors l'expression de $f(t)$ et $g(t)$ en fonction de t .

SUJET 4 : AGRO 2023

Question de cours

Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a .

Exercice préparé

On rappelle que, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant respectivement les densités f et g , alors la variable aléatoire $X + Y$ admet une densité $f * g$ définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt$$

1. On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V suivant la loi uniforme sur $]0; 1[$.

Soient λ, μ deux réels strictement positifs.

- (a) Déterminer les lois des variables aléatoires $-\frac{1}{\lambda} \ln(U)$ et $-\frac{1}{\mu} \ln(V)$.

RÉPONSE:

En étudiant $P(-\frac{1}{\lambda} \ln(U) \leq x)$ pour x réel on trouve

$$-\frac{1}{\lambda} \ln(U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \text{ et } -\frac{1}{\mu} \ln(V) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$$



- (b) On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ .

Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument les valeurs de λ et μ et qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire $\min(X, Y)$.

RÉPONSE:

```
def expo(lam):
    return -np.log(rd.random())/lam
def mini(lam,mu):
    return min(expo(lam), expo(mu))
```



- (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\min(X, Y)$ et vérifier qu'il s'agit d'une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

RÉPONSE:

Soit x un réel

$$\mathbb{P}(\min(X, Y) > x) = \mathbb{P}(X > x, Y > x) \quad \text{définition d'un minimum}$$

$$= \mathbb{P}(X > x) \mathcal{P}(\cdot | Y > x) \quad \text{indépendance de } X \text{ et } Y$$

$$= (1 - \mathbb{P}(X \geq x))(1 - \mathbb{P}(Y \geq x))$$

On en déduit que les fonctions de répartition de X , Y et $\min(X, Y)$ vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - F_{\min(X, Y)} = (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x))$$

On trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{\min(X, Y)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-(\lambda + \mu)x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\min(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda + \mu)$$



- (d) Déterminer la loi de $-Y$.

RÉPONSE:

Soit x réel

$$\mathbb{P}(-Y \leq x) = \mathbb{P}(Y \geq -x)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(Y < x)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(Y \leq -x)$$

$$= 1 - F_Y(-x)$$

$$= \begin{cases} \exp(\mu x) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'avant dernière ligne permet de montrer rapidement que la fonction de répartition de $-Y$ est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sauf éventuellement en 0. $-Y$ admet donc une densité obtenue en dérivant la fonction de répartition où cela est possible et en complétant avec des valeurs arbitraires.

$$\text{Une densité de } -Y \text{ est } f_{-Y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \mu e^{\mu x} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



(e) Montrer qu'une densité de $X - Y$ est la fonction h définie sur \mathbb{R} par :

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

RÉPONSE:

On remarque que $X - y = X + (-Y)$ et que l'on peut donc appliquer la formule donnée en entête.

On note $Z = X - Y$ et f_Z la densité de Z obtenue par convolution et x un réel.

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= f_X \star f_{-Y}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t) dt \end{aligned}$$

Le premier terme du produit est non nul si t est positif, le deuxième terme est non nul si $x-t$ est négatif c'est à dire t est plus grand que x .

• cas $x \leq 0$

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \lambda\mu \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{\mu(x-t)} dt \\ &= \lambda\mu e^{\mu x} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} dt \\ &= \lambda\mu e^{\mu x} \left[\frac{1}{\lambda+\mu} - 0 \right] \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu x} \end{aligned}$$

• cas $x \geq 0$

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \lambda\mu \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{\mu(x-t)} dt \\ &= \lambda\mu e^{\mu x} \int_x^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} dt \\ &= \lambda\mu e^{\mu x} \left[\frac{e^{-(\lambda+\mu)x}}{\lambda+\mu} - 0 \right] \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda x} \end{aligned}$$



(f) Calculer alors la probabilité de l'événement $[X \leq Y]$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq y) &= \mathbb{P}(X - Y \leq 0) \\ &= \int_{-\infty}^0 f_Z(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu x} dx \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \int_{-\infty}^0 e^{\mu x} dx \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$



2. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :

- X_1, X_3, X_5 et plus généralement X_{2n+1} pour $n \in \mathbb{N}$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1;
- X_2, X_4, X_6 et plus généralement X_{2n} pour $n \in \mathbb{N}^*$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 2.

Si $i \geq 2$, on dit que l'événement « X_i est un creux » est réalisé si $[X_i \leq X_{i-1}]$ et $[X_i \leq X_{i+1}]$ sont réalisés tous les deux.

(a) À l'aide de Python, estimer la probabilité des événements « X_2 est un creux » et « X_3 est un creux ».

RÉPONSE:

```
def simulation(N):
    nbC2, nbC3=0,0
    for i in range(N):
        X1, X3=expo(1), expo(1)
        X2, X4=expo(2), expo(2)
        if X1>X2 and X3>X2:
            nbC2+=1
        if X2>X3 and X4>X3:
            nbC3+=1
    return nbC2/N, nbC3/N
```

un appel `simulation(10**6)` renvoie (0.499957, 0.199854)



(b) Calculer la probabilité des deux événements précédents.

RÉPONSE:

X_2 est un creux est $[X_2 \leq X_1] \cap [X_2 \leq X_3]$ mais **les deux événements ne sont pas indépendants** Le point clef est de remarquer

$$[X_2 \leq X_1] \cap [X_2 \leq X_3] = [X_2 \leq \min(X_1, X_3)]$$

et

- X_1 et X_3 sont indépendantes et suivent des loi exponentielles $\min(X_1, X_3)$ suit donc une loi exponentielle de paramètre $1+1=2$ (question 1c)
- En utilisant le lemme des coalitions $\min(X_1, X_3)$ est indépendante de X_2 et ces deux variables aléatoires suivent des lois exponentielles on peut donc appliquer le résultat de la question précédente

$$\mathbb{P}(X_2 \leq \min(X_1, X_3)) = \frac{2}{2+(1+1)} = \frac{1}{2}$$

de même

$$\mathbb{P}(X_3 \leq \min(X_2, X_4)) = \frac{1}{1+(2+2)} = \frac{1}{5}$$

La probabilité que X_2 est un creux est 0.5 celle que X_3 est un creux est 0.2



3. (a) Que vaut la probabilité de l'événement « X_2 et X_3 sont des creux »?

RÉPONSE:

Si « X_2 et X_3 sont des creux » est réalisé cela implique que $[X_2 = X_3]$ est réalisé et comme $X_1 - X_2$ est une variable à densité (une des questions précédente) cet événement est de probabilité nulle.



(b) Les événements « X_4 est un creux » et « X_8 est un creux » sont-ils indépendants?

RÉPONSE:

Le premier événement est fonction de X_3, X_4 et X_5 ; le deuxième de X_7, X_8 et X_9 . Le lemme des coalitions donnent l'indépendance de ces deux événements

(c) Déterminer la loi du nombre de creux parmi les 10 variables aléatoires $X_4, X_8, X_{12}, \dots, X_{40}$.

RÉPONSE:

On reconnaît une expérience binomiale, on compte le nombre de creux parmi 10 expériences indépendantes. La probabilité d'un creux est 0.5, donc le nombre de creux suit une loi binomiale de paramètre 40 et 0.5



SUJET 5 : AGRO 2023

Question de cours

Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Exercice préparé

- On dispose initialement d'une urne U_0 contenant 1 boule blanche et 2 boules rouges.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on remplit ensuite l'urne U_{n+1} avec 3 boules de la façon suivante. On effectue 3 tirages avec remise dans l'urne U_n , et pour chaque boule rouge (respectivement blanche) tirée, on place une nouvelle boule rouge (respectivement blanche) dans l'urne U_{n+1} .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n le nombre de boules blanches dans l'urne U_n . En particulier $Y_0 = 1$.

1. Identifier la loi de la variable aléatoire Y_1 .

RÉPONSE:

$$Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 1/3)$$



2. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in \{0; 1; 2; 3\}$. Déterminer la loi de Y_{n+1} sous la probabilité conditionnelle $P_{[Y_n=k]}$, c'est-à-dire calculer, pour tout $j \in \{0; 1; 2; 3\}$: $P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j)$.

RÉPONSE:

Si $[Y_n = k]$ est réalisé, l'urne dans laquelle a lieu le tirage $n+1$ est composée de trois boules dont k blanches. Le nombre de boules blanches tirées suit un schéma binomiale

$$\text{Pour } k \in \{0; 1; 2; 3\} \text{ et } j \in \{0; 1; 2; 3\} \quad \mathbb{P}_{Y_n=k}(Y_{n+1} = j) = \binom{3}{j} \left(\frac{k}{3}\right)^j \left(\frac{3-k}{3}\right)^{3-j}$$

Remarque : La formule est juste même si $k=0$, dans ce cas la seule probabilité non nulle est $\mathbb{P}_{Y_n=3}(Y_{n+1} = 0)$. Elle est juste aussi pour $k=3$. Ces deux situations sont des états stationnaires



3. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et simulant les variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n . La fonction renverra le résultat sous la forme d'une liste $[Y_0, Y_1, \dots, Y_n]$

RÉPONSE:

```
import random as rd
def binom(n,p):
    NbSucces=0
    for i in range(n):
        if rd.random()<p:
            NbSucces+=1
    return NbSucces
def Y(n):
    R=[]
    k=1
    for i in range(n):
        k=binom(3, k/3)
        R.append(k)
    return R
```



4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que tout $k \in \{0; 1; 2; 3\}$, $\sum_{j=0}^3 j P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) = k$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 j \mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) &= \sum_{j=0}^3 j \binom{3}{j} \left(\frac{k}{3}\right)^j \left(\frac{3-k}{3}\right)^{3-j} \\ &= 3 \frac{k}{3} \end{aligned} \quad \text{on reconnaît l'espérance d'une va suivant } \mathcal{B}(3, k/3)$$

$$\text{Pour tout } k \in \{0; 1; 2; 3\}, \quad \sum_{j=0}^3 j P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) = k.$$



(b) En déduire que $E(Y_{n+1}) = E(Y_n)$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1}) &= \sum_{j=0}^3 j \mathbb{P}(Y_{n+1} = j) && \text{définition} \\ &= \sum_{j=0}^3 j \left(\sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(Y_n = k) \mathbb{P}_{Y_n=k}(Y_{n+1} = j) \right) && \text{proba totales} \\ &= \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 j \mathbb{P}(Y_n = k) \mathbb{P}_{Y_n=k}(Y_{n+1} = j) \\ &= \sum_{k=0}^3 \sum_{j=0}^3 j \mathbb{P}(Y_n = k) \mathbb{P}_{Y_n=k}(Y_{n+1} = j) \\ &= \sum_{k=0}^3 \left[\mathbb{P}(Y_n = k) \sum_{j=0}^3 j \mathbb{P}_{Y_n=k}(Y_{n+1} = j) \right] \\ &= \sum_{k=0}^3 [\mathbb{P}(Y_n = k) k] && \text{question précédente} \\ &= E(Y_n) && \text{définition} \end{aligned}$$



(c) En déduire l'expression de $E(Y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

RÉPONSE:

$$\text{pour } n \text{ entier naturel } E(Y_n) = E(Y_0) = 1$$



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = P(Y_n = 0)$, $b_n = P(Y_n = 1)$, $c_n = P(Y_n = 2)$, et $d_n = P(Y_n = 3)$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{2}{3}(b_n + c_n)$.

RÉPONSE:

On utilise le théorème des probabilités totales

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(Y_n = k) \mathbb{P}_{Y_n=k}(Y_{n+1} = 1) \\ &= \mathbb{P}(Y_n = 1) \mathbb{P}_{Y_n=1}(Y_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(Y_n = 2) \mathbb{P}_{Y_n=2}(Y_{n+1} = 1) \quad \text{les autres proba condi sont nulles} \\ &= \mathbb{P}(Y_n = 1) \left(\frac{3}{1} \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \mathbb{P}(Y_n = 2) \left(\frac{3}{1} \right) \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right) \\ &= \mathbb{P}(Y_n = 1) \times \frac{4}{9} + \mathbb{P}(Y_n = 2) \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{4}{9} b_n + \frac{2}{9} c_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = 2) = \sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(Y_n = k) \mathbb{P}_{Y_n=k}(Y_{n+1} = 2) \\ &= \mathbb{P}(Y_n = 1) \mathbb{P}_{Y_n=1}(Y_{n+1} = 2) + \mathbb{P}(Y_n = 2) \mathbb{P}_{Y_n=2}(Y_{n+1} = 2) \quad \text{les autres proba condi sont nulles} \\ &= \mathbb{P}(Y_n = 1) \left(\frac{3}{2} \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \mathbb{P}(Y_n = 2) \left(\frac{3}{2} \right) \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right) \\ &= \mathbb{P}(Y_n = 1) \times \frac{2}{9} + \mathbb{P}(Y_n = 2) \times \frac{4}{9} \\ &= \frac{2}{9} b_n + \frac{4}{9} c_n \end{aligned}$$

En sommant on trouve le résultat demandé



6. En déduire la convergence et la limite des suites (b_n) et (c_n) .

RÉPONSE:

On pose pour n dans \mathbb{N} $w_n = b_n + c_n$, cette suite géométrique de raison $1/3$ tend vers 0. Comme on manipule des probabilités

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq b_n \leq w_n$$

Avec le théorème des gendarmes

$$(b_n) \text{ et } (c_n) \text{ tendent vers } 0$$



7. Montrer que la suite (a_n) et la suite (d_n) sont croissantes. Montrer qu'elles convergent.

RÉPONSE:

Soit n fixé. Si $[Y_n = 0]$ est réalisé il ne reste plus de boule blanche à tirer, donc $[Y_{n+1} = 0]$ sera réalisé

$$[Y_n = 0] \subset [Y_{n+1} = 0]$$

par croissance d'une probabilité

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) \leq \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0)$$

$$(a_n) \text{ et la suite } (d_n) \text{ sont croissantes}$$

De plus ce sont deux suites de probabilités, donc elles sont bornées par 0 et 1, en utilisant le théorème de la limite monotone

$$(a_n) \text{ et la suite } (d_n) \text{ convergent.}$$



8. À l'aide de la question 4, montrer que (d_n) converge vers $1/3$. Quelle est la limite de la suite (a_n) ? Interpréter le résultat.

RÉPONSE:

D'après 4 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_n) = 1$ donc $0 \cdot a_n + 1 \cdot b_n + 2 \cdot c_n + 3 \cdot d_n = 1$ en passant à la limite

$$\lim_{+\infty} d_n = 1/3$$

Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n + b_n + c_n + d_n = 1$$

$$\lim_{+\infty} a_n = 1/3$$



9. On note T le numéro de la première urne ne contenant que des boules rouges ou que des boules blanches.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(T > n)$.

RÉPONSE:

D'après ce qui précède et comme les urnes unicolores sont stables

$$\{T > n\} = \{Y_n = 1\} \cup \{Y_n = 2\}$$

et l'union est disjointe

$$\mathbb{P}(T > n) = b_n + c_n$$

On sait que ce sont les termes d'une suite géométrique de raison $2/3$ et de premier terme 1.

$$\mathbb{P}(T > n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$



(b) En déduire la loi de T et son espérance.

RÉPONSE:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = n) &= \mathbb{P}(T > n-1) - \mathbb{P}(T > n) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$



On reconnaît une loi géométrique de raison $2/3$