

Exercices : limites, continuité...

Limites, développements limités

EXERCICE 1 :

1. Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{2x^2 + 3} - 3}$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)} - \tan(x)$. Indication : on pourra poser $t = x - \frac{\pi}{2}$.

3. Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ des fonctions

$$f_1 : x \mapsto \frac{5x^3 + 3x \sin(2x) - 2 \cos(x)}{3x^2 - 5x \ln(x) + 6x \cos(4x)} \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \frac{e^{-5x} + x^3 e^x - (\ln(x))^3}{2x^2 + e^{5x} - x^2 e^{2x}}.$$

EXERCICE 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

1. a) Simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x > 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a) Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$, $1 - x < f(x) \leq 1$.
b) En déduire que f admet une limite finie à droite en 0 et déterminer la valeur de cette limite.
c) Déterminer la limite de f à gauche en 0.

EXERCICE 3 :

À l'aide des équivalents classiques et/ou des développements limités calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2} \right)^{\frac{x}{x-1}}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x(1 - \cos(x))}$.	4. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x}}$ 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \times \ln \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)$ 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{x-1}$
--	--

EXERCICE 4 :

Démontrer que la courbe représentative de la fonction b définie par $b(x) = \frac{xe^x + 1}{e^x + 1}$ admet en $+\infty$ et $-\infty$ des asymptotes dont on donnera une équation cartésienne.

EXERCICE 5 :

On considère la fonction $f(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ et sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

1. Déterminer des réels a , b et c tels que, pour $x > 0$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

On pourra poser $h = \frac{1}{x}$ et utiliser des développements limités en 0.

2. Prouver que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$; on précisera l'équation réduite de cette asymptote ainsi que sa position par rapport à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Continuité, dérivabilité

EXERCICE 6 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \ln(x^2) - 2x$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
On note $\tilde{f}$ le prolongement de f défini sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la dérivabilité de $\tilde{f}$ en 0 et en donner une interprétation graphique.
4. Dresser le tableau de variation complet de $\tilde{f}$ puis tracer l'allure de sa courbe représentative.

EXERCICE 7 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. a) Écrire un programme Python qui, lorsqu'on l'exécute, affiche la courbe représentative de f sur $[-30; 30]$.
b) Quelles conjectures pouvez-vous émettre quant à la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine de définition ?
2. Démontrer rigoureusement que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.
5. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
6. La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $+\infty$. Si oui, en déterminer une équation cartésienne.

Correction

CORRECTION DE L'EXERCICE 1 :

1. On peut commencer par remarquer que pour tout réel x , $2x^2 + 3 > 0$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus $\sqrt{2x^2 + 3} - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$. La fonction f est donc définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

On peut aussi remarquer que la fonction f est paire : son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$. Ainsi, il suffit d'étudier les limites en $\sqrt{3}$ et en $+\infty$ car l'étude en $-\sqrt{3}$ et $-\infty$ sera identique.

Étude en $+\infty$: Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.

On sait que $x^2 - 3 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$.

De plus, pour $x > \sqrt{3}$, $\sqrt{2x^2 + 3} - 3 = x \left(\sqrt{2 + \frac{3}{x^2}} - \frac{3}{x} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2}x$, car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + \frac{3}{x^2}} - \frac{3}{x} = \sqrt{2}.$$

On en déduit que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{\sqrt{2}x} = \frac{x}{\sqrt{2}}$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{2}} = +\infty$.

Il est aussi possible de rédiger ce calcul de limite sans passer par les équivalents.

Étude en $\sqrt{3}$: Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée. Transformons l'écriture de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 3}{\sqrt{2x^2 + 3} - 3} = \frac{(x^2 - 3)(\sqrt{2x^2 + 3} + 3)}{(\sqrt{2x^2 + 3} - 3)(\sqrt{2x^2 + 3} + 3)} \\ &= \frac{(x^2 - 3)(\sqrt{2x^2 + 3} + 3)}{2x^2 - 6} = \frac{\sqrt{2x^2 + 3} + 3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\sqrt{2x^2 + 3} + 3}{2} = 3.$$

2. Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.

En posant $t = x - \frac{\pi}{2}$, on a, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$:

$$\frac{1}{\cos(x)} - \tan(x) = \frac{1}{-\sin(t)} - \frac{\cos(t)}{-\sin(t)} = \frac{\cos(t) - 1}{\sin(t)}.$$

Or, lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$, t tend vers 0. De plus, on sait que $\cos(t) - 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^2}{2}$ et $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, donc, par quotient d'équivalents :

$$\frac{\cos(t) - 1}{\sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}t.$$

On peut donc en déduire que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t) - 1}{\sin(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1}{2}t = 0$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)} - \tan(x) = 0.$$

3. Pour ces deux fonctions les opérations classiques sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence de formes indéterminées.

Pour $x > 0$, on a :

$$f_1(x) = \frac{5x^3}{3x^2} \times \frac{1 + \frac{3\sin(2x)}{5x^2} - \frac{2\cos(x)}{5x^3}}{1 - \frac{5\ln(x)}{3x} + \frac{2\cos(4x)}{x^3}} = \frac{5x}{3} \times \frac{1 + \frac{3\sin(2x)}{5x^2} - \frac{2\cos(x)}{5x^3}}{1 - \frac{5\ln(x)}{3x} + \frac{2\cos(4x)}{x^3}}.$$

La fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est bornée et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{5x^2} = 0$, donc on peut affirmer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sin(2x)}{5x^2} = 0.$$

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cos(x)}{5x^3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cos(4x)}{x^3} = 0$.

D'autre part, d'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5\ln(x)}{3x} = 0$.

Et, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{3} = +\infty$, par opérations sur les limites, on peut conclure que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty. \text{ On évitera d'écrire } +\infty \times \frac{1}{1}.$$

Pour $x > 0$, on a :

$$f_2(x) = \frac{x^3 e^x}{e^{5x}} \times \frac{\frac{e^{-6x}}{x^3} + 1 - \frac{(\ln(x))^3}{x^3 e^x}}{\frac{2x^2}{e^{3x}} + 1 - x^2 e^{-3x}} = \frac{x^3}{e^{4x}} \times \frac{\frac{e^{-6x}}{x^3} + 1 - \frac{(\ln(x))^3}{x^3 e^x}}{\frac{2x^2}{e^{3x}} + 1 - x^2 e^{-3x}}.$$

D'après les croissances comparées on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{4x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{e^{5x}} = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-3x} = 0.$$

Par simples opérations sur les limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-6x}}{x^3} = 0$.

Et enfin, pour utiliser rigoureusement les croissances comparées pour calculer la limite de $\frac{(\ln(x))^3}{x^3 e^x}$, on commence par réécrire cette expression sous la forme :

$$\frac{(\ln(x))^3}{x^3 e^x} = \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^3 \times \frac{1}{e^x}.$$

On peut alors affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^3}{x^3 e^x} = 0$.

Ainsi, par opérations sur les limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 2 :

1. a) Lorsque $x > 1$, on a $0 < \frac{1}{x} < 1$ (stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$) et donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$. Ainsi, pour $x > 1$, $f(x) = 0$.
On a donc aisément, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- b) On reprend un raisonnement semblable : pour $x < -1$, $-1 < \frac{1}{x} < 0$ (stricte décroissance de la fonction inverse sur $] -\infty; 0[$) et donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -1$. Ainsi, pour $x < -1$, $f(x) = -x$.
On a donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
2. a) On sait que pour tout réel h , $h - 1 < \lfloor h \rfloor \leq h$, donc pour $x \in]0; 1[$, $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$.
En multipliant cet encadrement par x qui est strictement positif, on obtient $1 - x < f(x) \leq 1$.
- b) On peut remarquer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1$. Donc, par encadrement de limites, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.
- c) Pour $x \in]-1; 0[$, on a toujours $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$. Mais cette fois-ci on multiplie l'encadrement par x qui est strictement négatif pour obtenir $1 \leq f(x) < 1 - x$.
On a, de même que dans la question précédente, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 3 :

1. Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.

On sait que $\ln(1 + X) \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ on peut écrire

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}. \text{ Donc } x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \times \frac{1}{x} = x$$

$$\text{On a donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

2. Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x/(x-1)} = e^{\frac{x}{x-1} \ln((x+1)/2)}. \text{ Effectuons le changement de variable } t = x - 1$$

$$(\text{lorsque } x \rightarrow 1, t \rightarrow 0). \text{ On a alors } \left(\frac{x+1}{2}\right)^{x/(x-1)} = e^{\frac{t+1}{t} \ln(1+t/2)}.$$

Or $\ln(1 + X) \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$ et comme $t/2 \rightarrow 0$ on peut écrire $\ln(1 + t/2) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{2}$. On en déduit que $\frac{t+1}{t} \ln(1 + t/2) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t+1}{2}$ et donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t+1}{t} \ln(1 + t/2) = \frac{1}{2}$.

Par composée de limites, on a alors $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{x/(x-1)} = e^{1/2} = \sqrt{e}$. *Attention de ne pas composer l'équivalent par la fonction exponentielle.*

3. Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée. On se sert des développements limités usuels.

$$\frac{\sin x - x \cos x}{x(1 - \cos x)} = \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{3}. \text{ Finalement, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x(1 - \cos x)} = \frac{2}{3}.$$

4. Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée. On se sert des développements limités usuels.

$$(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(\cos x)}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1 - x^2/2 + o(x^2))} = e^{\frac{x}{2} + o(x)}.$$

$$\text{On obtient donc } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

5. Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.

$$\text{On a } \ln(1 + x) = \ln x + \ln(1 + 1/x), \text{ donc } \frac{\ln(1 + x)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln(1 + 1/x)}{\ln(x)}.$$

$$\text{Par conséquent } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x)}{\ln x} = 1.$$

Or on sait que $\ln u \underset{u \rightarrow 1}{\sim} u - 1$ donc

$$\ln \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1 = \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}.$$

On a donc $\ln x \times \ln \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ et par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \times \ln \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right) = 0.$$

6. Les opérations de base sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.

On pose $t = x - 1$. On a donc $t \rightarrow 0$ et de plus

$$\begin{aligned} e^{x^2+x} - e^{2x} &= e^{t^2+3t+2} - e^{2t+2} = e^{2+2t} (e^{t^2+t} - 1) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} e^2 \times (t^2 + t) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} e^2 \times t \\ \Rightarrow \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{x-1} &\underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{e^2(x-1)}{x-1} = e^2. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{x-1} = e^2.$

On aurait aussi pu transformer ce calcul de limite en un calcul de limite de taux d'accroissement et utiliser la notion de nombre dérivé.

CORRECTION DE L'EXERCICE 4 :

Déterminons tout d'abord les limites de b en $+\infty$ et $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x(1+e^{-x}/x)}{e^x(1+e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1+e^{-x}/x}{1+e^{-x}} = +\infty$, par opérations sur les limites.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} b(x) = 1$ car d'après les croissances comparées $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

On peut donc déjà conclure que la courbe représentative de b admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Regardons maintenant la limite de $\frac{b(x)}{x}$ en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^{-x}/x}{1+e^{-x}} = 1$$

Enfin, déterminons la limite de $b(x) - x$ en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{e^x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{1/x-1}{1+1/e^x} = 0$, grâce aux croissances comparées.

Donc la courbe représentative de b admet en $+\infty$ asymptote d'équation $y = x$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 5 :

1. Pour $x > 0$ on pose $x = \frac{1}{h}$ et on a :

$$f(x) = \frac{1}{h} \times \frac{\sqrt{1+\frac{1}{h^2}}}{1+\frac{1}{h}+\sqrt{1+\frac{1}{h^2}}} = \frac{1}{h} \frac{\frac{1}{h}\sqrt{1+h^2}}{\frac{1}{h}(1+h+\sqrt{1+h^2})} = \frac{1}{h} \frac{\sqrt{1+h^2}}{(1+h+\sqrt{1+h^2})}.$$

On utilise $\sqrt{1+h^2} = 1 + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ et il vient :

$$f(x) = \frac{1}{h} \frac{1 + \frac{h^2}{2} + o(h^2)}{2 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)} = \frac{1}{h} \left(1 + \frac{h^2}{2} + o(h^2) \right) \times \frac{1}{2 \left(1 + \left(\frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o(h^2) \right) \right)}.$$

On substitue $\frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o(h^2)$ à u dans $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$ et on a :

$$f(x) = \frac{1}{2h} \left(1 + \frac{h^2}{2} + o(h^2) \right) \left(1 - \frac{h}{2} + 0h^2 + o(h^2) \right) = \frac{1}{2h} - \frac{1}{4} + \frac{h}{4} + o(h).$$

On revenant à la variable x on obtient :

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. D'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) = 0$. On en déduit que la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

De plus, lorsque x est voisin de $+\infty$, $f(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est positif, donc, au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 6 :

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. De plus la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc par composée la fonction $x \mapsto \ln(x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -2x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, donc par produit et somme, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. D'après le cours $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = 0$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \ln(x^2) - 2$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = -\infty$.

Ainsi $\tilde{f}$ n'est pas dérivable en 0 mais comme le taux d'accroissement tend vers $-\infty$, la courbe représentative de $\tilde{f}$ admet en 0 une tangente verticale.

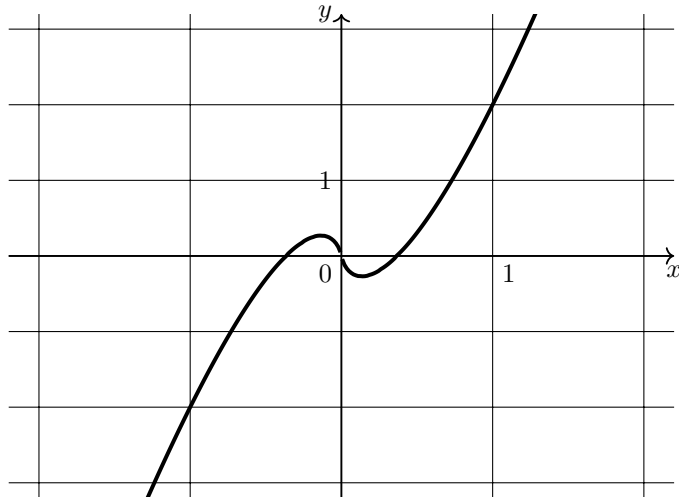
4. On peut remarquer que la fonction $\tilde{f}$ est impaire car son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x)$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\tilde{f}'(x) = \ln(x^2)$.

Et enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x^2) \left(1 - \frac{2}{\ln(x^2)}\right) = +\infty$.

On a donc le tableau de variations complet suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$\tilde{f}'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$\tilde{f}(x)$	$-\infty$	$\nearrow 2$	$\searrow 0$	$\searrow -2$	$\nearrow +\infty$	



CORRECTION DE L'EXERCICE 7 :

1. a)

```
from math import log,exp
import matplotlib.pyplot as mp
```

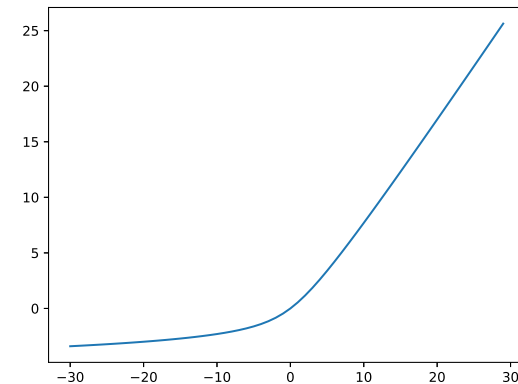
```
def f(x):
    if x==0:
        return 0
    else:
        return log((exp(x)-1)/x)
```

```
X=[k for k in range(-30,30)]
```

```
F=[f(x) for x in X]
```

```
mp.plot(X,F)
```

```
mp.show()
```



b) Il semble que la fonction f soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car la courbe semble « lisse ».

2. • Les fonctions $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow e^x - 1$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$ et x ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, donc $x \rightarrow \frac{e^x - 1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{e^x - 1}{x} > 0$, donc $x \rightarrow \frac{e^x - 1}{x}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Comme $t \rightarrow \ln t$ est continue sur $]0; +\infty[$, par composée, f est bien continue sur $\mathbb{R}^*$.

• On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ et ainsi f est continue en 0. f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

3. • Les fonctions $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow e^x - 1$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et x ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, donc $x \rightarrow \frac{e^x - 1}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. De plus $t \rightarrow \ln t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ donc, par composée, f est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

• Après calculs on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$.

4. Les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure car on est en présence d'une forme indéterminée.

On sait que $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $x(e^x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$.

Il nous faut maintenant trouver un équivalent de $xe^x - e^x + 1$ et pour cela on est obligé de passer par un DL :

$$xe^x - e^x + 1 = x \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Donc $xe^x - e^x + 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et on en déduit donc que $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$ ce qui signifie que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2}$.

5. On a vu que f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que f' admet une limite finie lorsque x tend vers 0.

Il nous reste à vérifier que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Pour tout $x \neq 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ donc $\ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^x - 1}{x} - 1$.

On remarque alors que $\frac{e^x - 1}{x} - 1 = \frac{e^x - 1 - x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$.

Donc $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$ et ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$. f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

En conclusion, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

6. Grâce aux croissances comparées, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

De plus, pour $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\ln(1 - e^{-x})}{x} - \frac{\ln(x)}{x}$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Et, pour $x > 0$, $f(x) - x = \ln \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right)$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$.

Donc la courbe représentative de f n'admet pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$.