DM 06 vad

BCPST Spé 2

à rendre le mercredi 15 novembre

I Caractéristique d'une loi géométrique

Dans cette partie on suppose que X est une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0;1[)$

1. Calculer, pour $m \in \mathbb{N}$, $P(X > m)$
2. Montrer ue X vérifie

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \qquad P_{(X>m)}(X > n+m) = P(X > n)$$

II Étude d'une variable discrète sans mémoire.

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall m \in \mathbb{N}, P(X \geqslant m) > 0$.

On suppose également que X vérifie :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, P_{(X\geqslant m)}(X \geqslant n+m) = P(X \geqslant n)$$

On pose $P(X=0) = p$ et on suppose que $p > 0$.

1. On pose $q = 1-p$. Montrer que $P(X \geqslant 1) = q$. En déduire que $0 < q < 1$.
2. Montrer que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, P(X \geqslant n+m) = P(X \geqslant m)P(X \geqslant n)$.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = P(X \geqslant n)$.
   (a) Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite (u_n) est géométrique.
   (b) Pour tout n de N, exprimer $P(X \geqslant n)$ en fonction de n et de q.
   (c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n+1)$.
   (d) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X=n) = q^n p$.
4. (a) Reconnaître la loi suivie par la variable $X+1$.
   (b) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

III Facultatif : Taux de panne d'une variable discrète.

Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $P(Y \geqslant n) > 0$, on définit le taux de panne de Y à l'instant n, noté λ_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \lambda_n = P_{(Y\geqslant n)}(Y = n)$$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \dfrac{P(Y=n)}{P(Y \geqslant n)}$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1-\lambda_n = \dfrac{P(Y \geqslant n+1)}{P(Y \geqslant n)}$.
   (c) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \lambda_n < 1$.
   (d) Montrer par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(Y \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$$

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} P(Y=k) = 1 - P(Y \geqslant n)$.
   (b) En déduire que $\lim_{n\to\infty} P(Y \geqslant n) = 0$.
   (c) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) = +\infty$
   (d) Conclure quant à la nature de la série de terme général λ_n.
3. (a) Écrire une fonction récursive `f(n)` qui renvoie la valeur de $n!$
   (b) On considère la déclaration de fonction récursive suivante :

```
def g(a,n):
    if n==0 :
```

```
                return 1
        else:
                return a*g(a,n-1)
```

Dire quel est le résultat retourné à l'appel de $g(a,n)$.

(c) Proposer une fonction utilisant ces deux fonctions et le calcul de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

(d) Proposer une fonction qui à l'aide du résultat de la question 1a) de cette partie calcul le taux de panne à l'instant n d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $a > 0$, lorsque n et a sont entrés au clavier par l'utilisateur (on supposera $n \geqslant 1$).

(e) Compléter la déclaration de fonction suivante pour, qu'elle renvoie la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ à l'appel de *sigma(a,n)*.

```
import math as m
def sigma(a,n):
        p=1
        s=1
        for k in...... :
                p=........
                s=s+p
        return
```

IV Facultatif : Caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X.

1. Déterminer le taux de panne de la variable X dont la loi a été trouvée à la question 3 d) de la partie 2.
2. On considère une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Z \geqslant n) > 0$. On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \lambda$.

   (a) Montrer que $0 < \lambda < 1$.

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer $P(Z \geqslant n)$ en fonction de λ et n.

   (c) Conclure que les seules variables aléatoires Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le taux de panne est constant et telles que pour tout n de $\mathbb{N}$, $P(Z \geqslant n) > 0$, sont les variables dont la loi est du type de celle de X.