

INTERROGATION ÉCRITE N° 1 : CORRECTION

ÉNONCER DES DÉFINITIONS OU DES THÉORÈMES :

1. Définir ce qu'est une fonction impaire :

On dit que f est une fonction impaire sur I si, et seulement si :

- $\forall x \in I, -x \in I$ (on dit que I est symétrique par rapport à 0);
- $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$.

2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

Alors pour tout réel k compris entre les réels $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

CONNAÎTRE SES FORMULES :

1. Compléter les équivalents usuels suivants :

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2} \quad \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

2. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

SIMPLIFIER DES FRACTIONS :

1. Simplifier au maximum la fraction suivante : $A = \frac{36^3 \times 70^5 \times 10^2}{14^3 \times 28^2 \times 15^6}$.

$$A = 5 \times 2^6 = 320$$

2. Écrire la fraction suivante sans racine carrée au dénominateur : $B = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

$$B = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{15} - \sqrt{10}.$$

CALCULER DES DÉRIVÉES :

Déterminer la valeur de $f'(x)$ pour x appartenant au domaine indiqué et f définie ci-dessous :
(On ne cherchera pas à justifier que f est dérivable sur le domaine indiqué)

1. $x \in]0; +\infty[$ et $f(x) = x^{3x} + e^{\frac{1}{x}}$:

$$f'(x) = 3(\ln(x) + 1)e^{3x \ln(x)} - \frac{1}{x^2}e^{1/x}.$$

2. $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $f(x) = \tan(x) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{x}{(x^2 + 3)^{3/2}} = 1 + \tan^2(x) - \frac{x}{(x^2 + 3)^{3/2}}.$$

3. $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ et $f(x) = \ln(|x^2 + x - 2|)$:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}.$$

CALCULER DES LIMITES :

Donner, en justifiant **rigoureusement** lorsque c'est nécessaire, la valeur des limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - \ln(x)e^x + x^5 e^{-x}}{x^5 \ln(x) + \ln(x)e^{-x} - x^4} :$

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - \ln(x)e^x + x^5 e^{-x}}{x^5 \ln(x) + \ln(x)e^{-x} - x^4} &= \frac{\ln(x)e^x}{x^5 \ln(x)} \times \frac{\frac{x^4}{\ln(x)e^x} - 1 + \frac{x^5 e^{-2x}}{\ln(x)}}{1 + \frac{e^{-x}}{x^5} - \frac{1}{x \ln(x)}} \\ &= \frac{e^x}{x^5} \times \frac{\frac{1}{\ln(x)} \times \frac{x^4}{e^x} - 1 + \frac{1}{\ln(x)} \times \frac{x^5}{e^{2x}}}{1 + \frac{e^{-x}}{x^5} - \frac{1}{x \ln(x)}}. \end{aligned}$$

Grâce aux croissances comparées (*essayez de bien identifier où elles sont utilisées*) et aux opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - \ln(x)e^x + x^5 e^{-x}}{x^5 \ln(x) + \ln(x)e^{-x} - x^4} = -\infty.$$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(2x)e^x + \frac{2x^2 + 3}{1 - x^2} :$

La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc, par propriété du cours, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(2x)e^x = 0$.

De plus, $\frac{2x^2 + 3}{1 - x^2} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{2x^2}{-x^2} = -2$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(2x)e^x + \frac{2x^2 + 3}{1 - x^2} = -2$.