

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 0

1 Calcul d'une espérance de vie

1. La solution sur $\mathbb{R}^+$ du problème de Cauchy (1) est $\boxed{z : t \mapsto 1300e^{-\alpha t}}$.

Remarque : il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants, on peut donc donner les solutions sans aucune justification.

2. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\boxed{F(t) = 1 - \frac{z(t)}{z_0} = \frac{z_0 - z(t)}{z_0}}$.

$F(t)$ représente la proportion de personnes décédées dans la cohorte à un instant t , ou encore peut s'interpréter comme la probabilité pour une personne de la cohorte de ne plus être en vie à l'instant t et donc d'avoir eu une durée de vie inférieure ou égale à t .

- (b) Soit $A \in \mathbb{R}^{+*}$. On a

$$\int_0^A (1 - F(t))dt = \int_0^A e^{-\alpha t}dt = \boxed{-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha A} + \frac{1}{\alpha}}.$$

Comme $\alpha > 0$, on a $\lim_{A \rightarrow +\infty} -\alpha A = -\infty$ et donc $\boxed{\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A (1 - F(t))dt = \frac{1}{\alpha}}$.

- (c) Soit $A \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose, pour tout $t \in [0; A]$:

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 - F(t) = \frac{z(t)}{z_0} & u'(t) &= \frac{1}{z_0} z'(t) \\ v'(t) &= 1 & v(t) &= t. \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$ donc, par intégration par parties :

$$\boxed{\int_0^A (1 - F(t))dt = [t(1 - F(t))]_0^A - \frac{1}{z_0} \int_0^A t z'(t)dt.}$$

- (d) On a $[t(1 - F(t))]_0^A = Ae^{-\alpha A}$ donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} [t(1 - F(t))]_0^A = 0$ par croissances comparées (et toujours car $\alpha > 0$).

Ainsi, par passage à la limite dans l'égalité de la question précédente

$$\boxed{\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A (1 - F(t))dt = -\frac{1}{z_0} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t \frac{dz}{dt}(t)dt.}$$

3. (a) $z(t) - z(t + \Delta_t)$ représente le nombre d'individu décédés entre t et $t + \Delta_t$ donc le quotient $\frac{z(t) - z(t + \Delta_t)}{z_0}$ représente la proportion d'individus décédés entre t et $t + \Delta_t$. On peut aussi interpréter ce quotient comme $\boxed{\text{une approximation de la probabilité pour un individu de décéder entre l'instant } t \text{ et l'instant } t + \Delta_t.}$

La fonction z étant décroissante, on a $z(t + \Delta_t) \leq z(t)$ et donc $\boxed{\text{le quotient proposé est positif.}}$

- (b) Le quotient $\frac{z(t_i) - z(t_{i+1})}{z_0}$ peut donc s'interpréter comme une approximation de la probabilité pour un individu de décéder entre l'instant t_i et l'instant t_{i+1} , ce qui peut encore se voir comme la probabilité d'avoir une durée de vie environ égale à t_i . La somme intervenant dans l'expression donnée peut donc faire penser à une moyenne pondérée de la durée de vie d'un individu.

$\mathcal{E}_{\Delta_t}$ peut s'interpréter comme l'espérance de vie moyenne des individus de la population.

(c) Soit $A \in \mathbb{R}^{+*}$. On a

$$\begin{aligned}
 \int_0^A z'(t) dt &= [z(t)]_0^A \\
 &= z_0 e^{-\alpha A} - z_0 \\
 \int_0^A t z'(t) dt &= [t z(t)]_0^A - \int_0^A z(t) dt && \text{Intégration par parties} \\
 &= A z_0 e^{-\alpha A} - \left[-\frac{z_0}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^A \\
 &= A z_0 e^{-\alpha A} + \frac{z_0}{\alpha} e^{-\alpha A} - \frac{z_0}{\alpha}
 \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A z'(t) dt = -z_0$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t z'(t) dt = -\frac{z_0}{\alpha}$, par croissances comparées.

Donc $\lim_{\Delta_t \rightarrow 0} \mathcal{E}_{\Delta_t} = \frac{1}{\alpha}$.

On retrouve ici la valeur de l'espérance de vie de la question 2.b).

t étant compté en années, α est compté en année⁻¹.

$\frac{1}{\alpha}$ représente donc l'espérance de vie moyenne des individus de la population.

Pour l'estimer, on peut se fixer une valeur de $\Delta_t = 1$ an, puis considérer, pour N assez grand,

$$\frac{1}{\alpha} \approx \sum_{i=0}^N t_i \frac{z(t_i) - z(t_{i+1})}{z_0},$$

où $z(t_i) - z(t_{i+1})$ est égal au nombre de décès sur un an.

2 Modèle de Bernoulli

1. (a) On peut penser que a n'est pas constant pour prendre en compte le vieillissement de la population observée car le taux de mortalité n'est pas le même à 1 an et à 80 ans...
- (b) cS représente le nombre de personnes qui décèdent de la variole à l'instant t .
 - La quantité $x = R + S$ représente l'effectif de la population survivante (à l'instant t).
 - La quantité $\frac{dx}{dt}$ représente la variation de l'effectif de la cohorte (c'est une quantité négative, donc $-\frac{dx}{dt}$ représente la mortalité instantanée (toutes causes confondues).
 - D'après ce qui précède, $-\frac{dx}{dt} - cS$ représente la mortalité instantanée **due à la variole**.
 - Donc $\frac{-\frac{dx}{dt} - cS}{x}$ est le taux de mortalité dû à la variole.

On peut alternativement utiliser les équations du modèle pour calculer $\frac{dx}{dt} + cS$ et vérifier le résultat demandé.

- (c) Dans la cohorte fictive, il n'y a pas de variole. Donc le seul taux de mortalité à prendre en compte est a . On a donc

$$\frac{dz}{dt} = -az = \frac{1}{x} \left(\frac{dx}{dt} + cS \right) z.$$

2. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} q'(t) &= \frac{x'(t)S(t) - x(t)S'(t)}{S(t)^2} \\ &= \frac{(-a(t)x(t) - cS(t))S(t) + x(t)(a(t) + b + c)S(t)}{S(t)^2} \\ &= \frac{-cS(t) + bx(t) + cx(t)}{S(t)} \\ &= -c + (b + c)q(t). \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, q'(t) = (b + c)q(t) - c.}$

- (b) L'équation différentielle de la question précédente est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients et second membre constant dont les solutions sont :

$$t \mapsto Ke^{(b+c)t} + \frac{c}{b+c}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Or, on sait que $q(0) = \frac{x(0)}{S(0)} = 1$, $b + c = \frac{1}{8}$ et $\frac{c}{b+c} = \frac{1}{8}$.

q est donc de la forme $t \mapsto Ke^{(b+c)t} + \frac{c}{b+c}$ avec K vérifiant :

$$K + \frac{1}{8} = 1 \Leftrightarrow K = \frac{7}{8}.$$

Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, q(t) = \frac{7}{8}e^{t/8} + \frac{1}{8}.}$

3. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} H'(t) &= \frac{\frac{z'(t)x(t) - z(t)x'(t)}{x(t)^2}}{\frac{z(t)}{x(t)}} \\ &= \frac{-az(t)x(t) + z(t)(a(t)x(t) + cS(t))}{x(t)z(t)} \\ &= c \frac{S(t)}{x(t)} \\ H'(t) &= \boxed{\frac{c}{q(t)}} \\ &= \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{8} + \frac{7}{8}e^{t/8}} \\ H'(t) &= \boxed{\frac{1}{8} \times \frac{1}{1 + 7e^{t/8}}}. \end{aligned}$$

question précédente

- (b) Repartons du résultat admis. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln(G)}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\ln \left(\frac{z}{x} \right) \right) (t) \\ \Rightarrow \ln(G(t)) - \ln(G(0)) &= \ln \left(\frac{z(t)}{x(t)} \right) - \ln \left(\frac{z(0)}{x(0)} \right) \\ \Rightarrow \ln(G(t)) - \ln(1/8) &= \ln \left(\frac{z(t)}{x(t)} \right) \\ \Rightarrow z(t) &= 8x(t)G(t) \\ \Rightarrow \boxed{z(t) = \frac{8e^{t/8}}{1 + 7e^{t/8}}x(t)}. \end{aligned}$$

On a intégré entre 0 et t

$$\text{car } \frac{z(0)}{x(0)} = 1$$

4. À l'instant initial, si on suppose que l'inoculation a un effet immédiat et est effectuée en $t = 0$, la population restante est $y(0) = \gamma z(0)$ avec $\gamma = 1 - \frac{1}{200}$. Pour t parcourant $\mathbb{R}_+^*$, y décrit une population non soumise à la variole (car immunisée) donc qui vérifie les mêmes équations que z . Comme γ est une constante, par linéarité de la dérivation $\frac{z}{\gamma}$ vérifie les mêmes équations et les mêmes conditions initiales que z et donc par unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

$$\boxed{y = \gamma z.}$$

5. On peut mesurer x car c'est l'effectif survivant de la cohorte réelle étudiée. Comme γ et les autres paramètres sont donnés par le modèle on peut en déduire, en utilisant la formule donnée dans cette question, les valeurs de $y(t_i)$ pour une suite d'instant (t_i) . On peut alors estimer l'espérance de vie après inoculation par la formule vue en question I3b

$$\frac{1}{\alpha} \approx \sum_{i=0}^N t_i \frac{y(t_i) - y(t_{i+1})}{y_0}, \text{ avec } y(t_i) = \gamma z(t_i) = \gamma \frac{8e^{t_i/8}}{1 + 7e^{t_i/8}} x(t_i) \text{ et } y_0 = \gamma z(0) = \gamma x(0)$$

3 Estimation de la fonction a

1. (a) `from math import exp`

```
def extraction_ch():
    f = open("data.txt", "r")
    L = []
    L.append(f.readline())
    L.append(f.readline())
    return L
```

- (b) *Erreur d'indentation dans l'énoncé...*

```
def ch_vers_list(ch):
    L = []
    n = len(ch)
    sh = ""
    for k in range(0, n):
        if ch[k] != " ":
            sh = sh + ch[k]
        else:
            L.append(float(sh))
            sh = ""
    L.append(float(sh))
    return L
```

- (c) `def division(L1, L2):`
`if len(L1) != len(L2):`
`return False`
`else:`
`return [L1[k]/L2[k] for k in range(len(L1))]`

- (d) `Lch = extraction_ch()`
`Lnorm = division(ch_vers_list(Lch[0]), ch_vers_list(Lch[1]))`

2. (a) i. La minimisation de $\tilde{M}$ par rapport à α et β correspond à la recherche de la droite de régression linéaire ou droite des moindres carrés. On cherche donc à approcher le nuage de points (t, ℓ_t) par une droite.

- ii. Cette fois on ne cherche plus à approcher le nuage de point par une droite mais plutôt par la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \lambda e^{-\mu x} + \gamma$. En effet, la quantité $(\ell_t - \lambda e^{-\mu t} - \gamma)^2$ correspond à la distance au carré entre le point (t, ℓ_t) et le point d'abscisse t de la courbe $\mathcal{C}$.

La décroissance rapide en 0 nous incite à considérer un modèle exponentiel plutôt qu'un modèle polynômial.

- (b) On remarque que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda e^{-\mu x} + \gamma = \gamma$. On peut donc penser qu'il serait judicieux de choisir pour γ la

valeur vers laquelle semble tendre notre nuage de point. On pourrait poser $\boxed{\gamma_0 = 0,01}$.

Pour le choix de λ on peut utiliser la valeur en $t = 0$. On aimerait avoir :

$$\lambda + \gamma_0 \approx 0,28 \Leftrightarrow \lambda \approx 0,27.$$

On pourrait donc poser $\boxed{\lambda_0 = 0,27}$.

- (c) *Parenthèse manquante dans l'énoncé.*

La fonction proposée calcule $M(\lambda_0, \mu, \gamma_0)$.

- (d) Le but est, comme expliqué en question 2.(a)ii., de minimiser M par rapport à λ , μ et γ . Comme nous avons déjà fixé λ et γ , nous cherchons donc à minimiser la fonction M_μ en fonction de μ .

Graphiquement il faut donc trouver l'abscisse du minimum de la courbe. La courbe étant très « aplatie », il est difficile de lire précisément la valeur de cet abscisse.

On peut peut-être estimer que $\mu_0 \approx 0,75$.

Pour un peu plus de précision on pourrait tracer la fonction M_μ sur l'intervalle $[0, 5; 1]$ par exemple.

3. (a) Voici une possibilité (mais ce n'est pas la seule!) :

```
def argmin3(f,x,y,z):
    return argmin2(f,x,argmin2(f,y,z))
```

- (b)

```
def minimum(f,A,B,eps):
```

```
    g = A
    d = B
    while d-g>eps:
        xg = g + (d-g)/3
        xd = g + 2*(d-g)/3
        if f(xg) < f(xd):
            d = xd
        elif f(xg) > f(xd):
            g = xg
        else:
            g,d = xg,xd
    return argmin3(f,g,d,(g+d)/2)
```

4. (a)

```
def test_croissant(L):
    for k in range(len(L)-1):
        if L[k]>L[k+1]:
            return False
    return True
```

- (b) On peut former une liste de valeurs prises par la fonction M_μ sur une subdivision de l'intervalle $[0, 8; 3]$ puis utiliser la fonction `test_croissant` sur cette liste.

- (c) En s'inspirant du graphique de la question 2.(d), on peut trouver μ_0 en entrant la commande `minimum(M_mu,0,2,0.01)`.

Si on admet qu'à l'aide de la question précédente on a vérifié que la fonction M_μ est croissante sur $[0, 8; 3]$, on peut se contenter de la commande `minimum(M_mu,0,0.8,0.01)`.

- (d) Graphiquement on remarque que la fonction M_μ est presque nulle en $\mu_0 \approx 0,7061$. Cela signifie que l'approximation du nuage de point proposé par un modèle exponentiel du type $t \mapsto \lambda e^{-\mu t} + \gamma$ est une bonne approximation. L'hypothèse a constant n'était donc pas du tout adaptée.

4 Modèle individu-centré

1. On a donc $Z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Z_1 = \begin{pmatrix} 1 - (a + b + c) \\ b \\ a + c \end{pmatrix}$.
2. (a) i. La famille $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ est un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) &= \mathbb{P}(X_n = 0)\mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 2) + \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 2) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_n = 2)\mathbb{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 2) \\ &= (a + c)\mathbb{P}(X_n = 0) + a \times \mathbb{P}(X_n = 1) + 1 \times \mathbb{P}(X_n = 2). \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = (a + c)\mathbb{P}(X_n = 0) + a \times \mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2).}$$

- ii. De même que dans la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}(X_n = 0)\mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_n = 2)\mathbb{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 0) \\ &= (1 - (a + b + c))\mathbb{P}(X_n = 0) + 0 \times \mathbb{P}(X_n = 1) + 0 \times \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_n = 0)\mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_n = 2)\mathbb{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1) \\ &= b\mathbb{P}(X_n = 0) + (1 - a) \times \mathbb{P}(X_n = 1) + 0 \times \mathbb{P}(X_n = 2). \end{aligned}$$

On observe donc que l'on a bien $\boxed{Z_{n+1} = QZ_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

- (b) On pose $\mathcal{P}(n)$: « $Z_n = Q^n Z_0$ ».

Initialisation : D'une part, pour $n = 0$, $Z_n = Z_0$.

D'autre part, pour $n = 0$, $Q^n Z_0 = Q^0 Z_0 = I_3 Z_0 = Z_0$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est bien vérifiée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifiée. On a alors

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= QZ_n && \text{question précédente} \\ &= Q \times Q^n Z_0 && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= Q^{n+1} Z_0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vérifiée.

D'après le principe de récurrence on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, Z_n = Q^n Z_0.}$

- (c) On cherche les réels λ tels que $\text{rg}(Q - \lambda I_3) < 3$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &\text{rg}(Q - \lambda I_3) < 3 \\ \Leftrightarrow &\text{rg} \begin{pmatrix} 1 - (a + b + c) - \lambda & 0 & 0 \\ b & 1 - a - \lambda & 0 \\ a + c & a & 1 - \lambda \end{pmatrix} < 3 \\ \Leftrightarrow &1 - (a + b + c) - \lambda = 0 \text{ ou } 1 - a - \lambda = 0 \text{ ou } 1 - \lambda = 0 \\ \Leftrightarrow &\lambda = 1 - (a + b + c) \text{ ou } \lambda = 1 - a \text{ ou } \lambda = 1, \end{aligned}$$

car une matrice triangulaire inférieure de taille 3 a un rang strictement inférieur à 3 si, et seulement si, elle possède un élément nul sur sa diagonale.

$\boxed{\text{Les réels pour lesquels } Q - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible sont } \lambda_1 = 1 - a - b - c, \lambda_2 = 1 - a \text{ et } \lambda_3 = 1.}$

(d) i. On pose $C_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned} QC_1 = \lambda_1 C_1 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (1-a-b-c)x \\ bx + (1-a)y \\ (a+c)x + ay + c \end{pmatrix} = (1-a-b-c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a-b-c)x = (1-a-b-c)x \\ bx + (1-a)y = (1-a-b-c)y \\ (a+c)x + ay + c = (1-a-b-c)c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -b-c \\ y = b \end{cases} \quad b \neq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{C_1 = \begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$

ii. On pose $C_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned} QC_2 = \lambda_2 C_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (1-a-b-c)x \\ bx + (1-a)y \\ (a+c)x + ay + 1 \end{pmatrix} = (1-a) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a-b-c)x = (1-a)x \\ bx + (1-a)y = (1-a)y \\ (a+c)x + ay + 1 = 1-a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad b+c \neq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

iii. On pose $C_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned} QC_3 = \lambda_3 C_3 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (1-a-b-c)x \\ bx + (1-a)y \\ (a+c)x + ay + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a-b-c)x = x \\ bx + (1-a)y = y \\ (a+c)x + ay + 1 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad a+b+c \neq 0 \text{ et } a \neq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(e) On a $P = \begin{pmatrix} -b-c & 0 & 0 \\ b & -1 & 0 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc } QP = \begin{pmatrix} (1-a-b-c)(-b-c) & 0 & 0 \\ (1-a-b-c)b & -1+a & 0 \\ (1-a-b-c)c & 1-a & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et } P\Delta = \begin{pmatrix} (1-a-b-c)(-b-c) & 0 & 0 \\ (1-a-b-c)b & -1+a & 0 \\ (1-a-b-c)c & 1-a & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \boxed{QP = P\Delta.}$$

(f) P est une matrice triangulaire inférieure sans 0 sur la diagonale donc $\boxed{P \text{ est inversible.}}$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. On a alors

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} (-b-c)x = \alpha \\ bx - y = \beta \\ cx + y + z = \gamma \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{b+c}\alpha \\ y = -\frac{1}{b+c}\alpha - \beta \\ z = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

$$\text{Donc } \boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b+c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{b+c} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(g) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : Q^n = P\Delta^n P^{-1}$.

Initialisation : D'une part $Q^0 = I_3$ et d'autre par $P\Delta^0 P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée. On a alors

$$\begin{aligned} Q^{n+1} &= Q^n \times Q \\ &= P\Delta^n P^{-1} \times P\Delta P^{-1} && \text{hypothèse de récurrence et question 2.e)} \\ &= P\Delta^{n+1} P^{-1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q^n = P\Delta^n P^{-1}$.

$$\Delta \text{ étant diagonale, on a } \Delta^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'après la question 2.b), on a donc } \boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, Z_n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.}$$

(h) $\lambda_1 = 1 - a - b - c$ et $\lambda_2 = 1 - a$ étant des probabilités strictement inférieures à 1 on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_2^n = 0.$$

Donc, d'après l'expression de Z_n donnée,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = 1.}$$

Il est donc presque sûr que l'individu finisse pas décéder.

3. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}([X_n \neq 2] \cap [X_{n+1} = 2]) \\
&= \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [X_{n+1} = 2]) \cup ([X_n = 1] \cap [X_{n+1} = 2]) \\
&= \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [X_{n+1} = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 1] \cap [X_{n+1} = 2]) && \text{union d'évts disjoints} \\
&= \mathbb{P}(X_n = 0) \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 2) + \mathbb{P}(X_n = 1) \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 2) \\
&= \lambda_1^n \times (a + c) + \frac{-b\lambda_1^n + b\lambda_2^n}{b + c} \times a \\
&= \left(a + c - \frac{ab}{b + c}\right) \lambda_1^n + \frac{ab}{b + c} \lambda_2^n \\
&= \frac{c(a + b + c)}{b + c} \lambda_1^n + \frac{ab}{b + c} \lambda_2^n.
\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \frac{c(a + b + c)}{b + c} \lambda_1^n + \frac{ab}{b + c} \lambda_2^n.}$