

DL mathématiques n°01

Pour le lundi 14 septembre 2026

On considère la fonction f définie sur l'ouvert de $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{++}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{++} \quad f(x, y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

La première partie consiste en l'étude des extrema éventuels de la fonction f , et la deuxième partie a pour objectif l'étude d'une suite implicite définie à l'aide de la fonction f .

Ces deux parties sont indépendantes.

Partie A

- On utilise python pour tracer les lignes de niveau de la fonction f . On obtient le graphe suivant :
Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f , dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.
- Démontrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{++}$.
 - Calculer les dérivées partielles premières de f , puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A , que l'on déterminera.
 - Calculer les dérivées partielles secondes de f .

Partie B

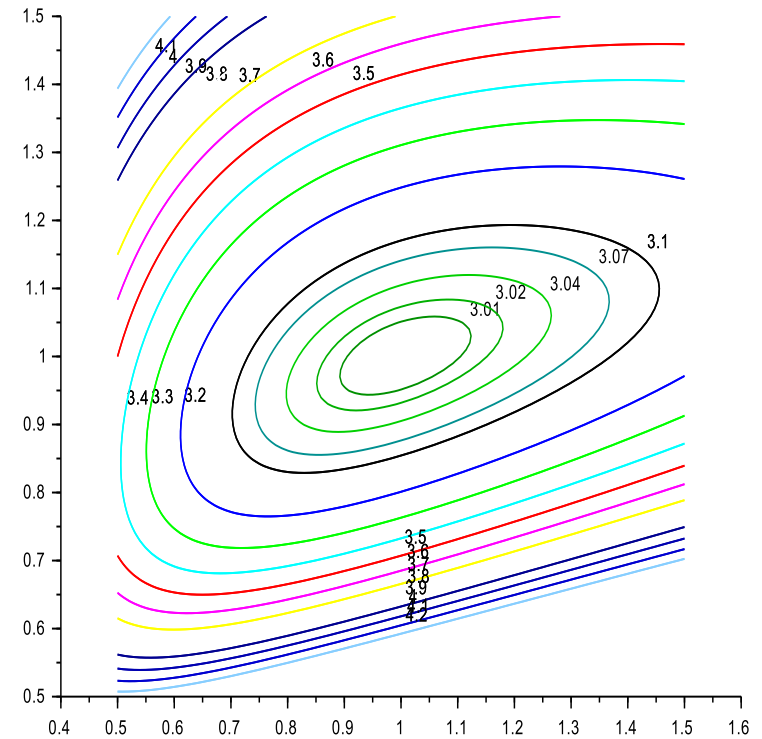
Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par :

$$\forall x > 0 \quad h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
- En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation : $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.
- Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}$$

- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4$.
- Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.



- Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.
 - En supposant que $\ell > 1$, démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^n = +\infty$.
En déduire une contradiction.
 - Déterminer la limite de (v_n) .

Les questions suivantes sont facultatives

- Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad v_n \leq 3$
 - Écrire une fonction python d'en-tête `h(n, x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}^{++}$ en entrée.
 - Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```
def v(n):
```

```

a=1
b=3
while (b-a)>10**(-5):
    c=(a+b)/2
    if h(n,c)>  :
        .....
    else:
        .....

return ..

```

(d) À la suite de la fonction v, on écrit le code suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```

Y=[]
for k in range(1,21):
    Y.append(v(k)**k)

```

```
plt.plot(Y)
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :

Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.

Que peut-on conjecturer?

(e) Montrer que : $\forall n \geq 1, \quad (v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

(f) Retrouver ainsi le résultat de la question 4) c.

