

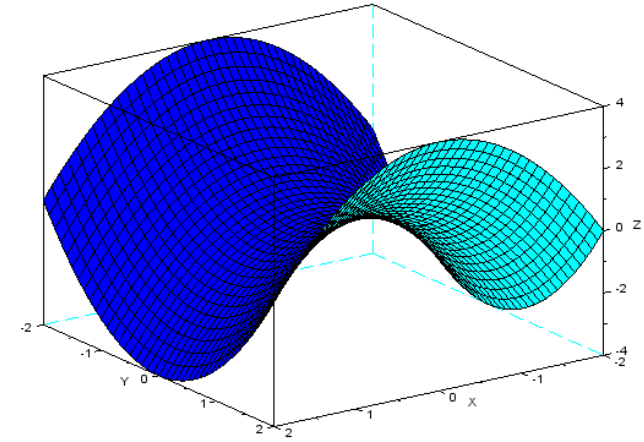
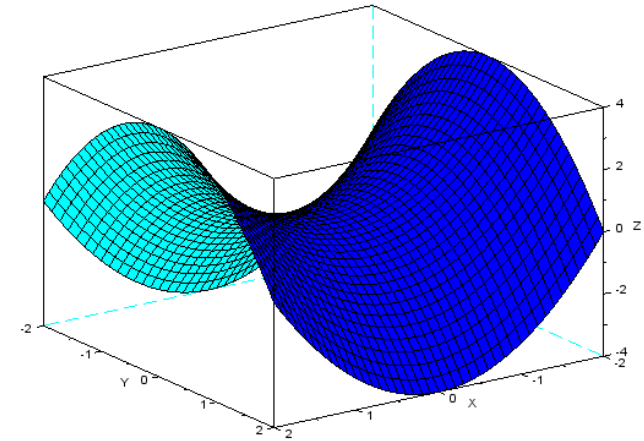
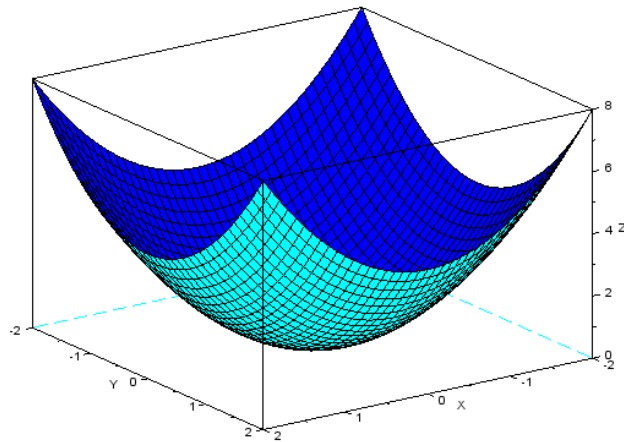
RÉVISIONS : FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Préliminaires

Exercice 1.

Grace à Python, on a représenté le graphe des trois fonctions suivantes

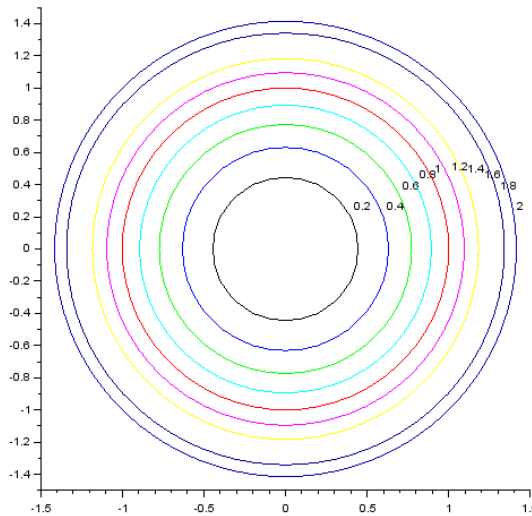
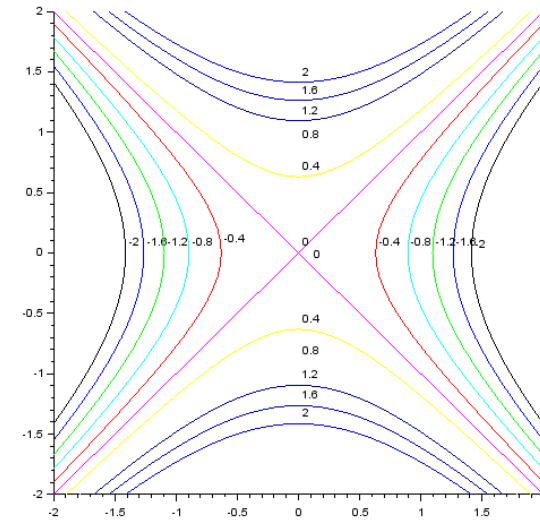
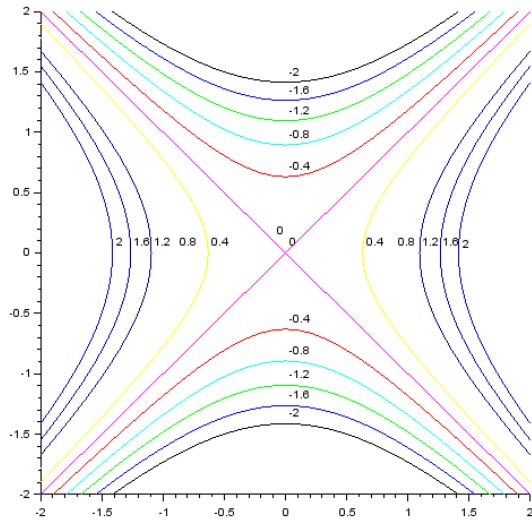
$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} & f_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 - y^2 & (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 \\ \\ f_3 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto -x^2 + y^2 \end{aligned}$$



Associer les trois graphes aux trois fonctions. Justifier rapidement votre réponse.

Exercice 2.

Pour les fonctions de l'exercice précédent nous avons tracé les lignes de niveau. Associer chaque graphe à sa fonction (x est en abscisses et y en ordonnées).



Dérivabilité

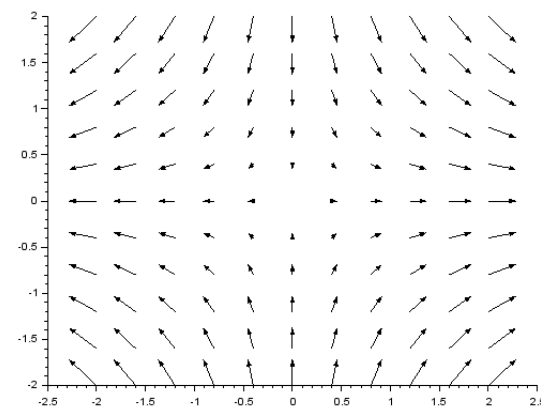
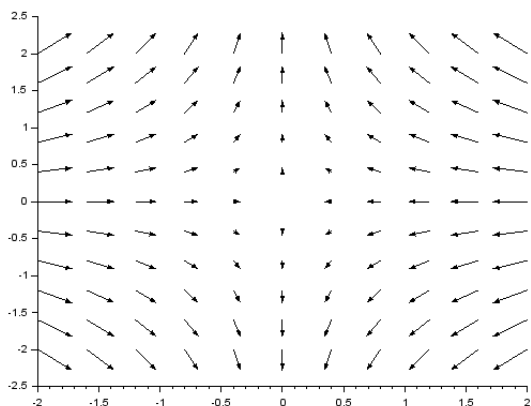
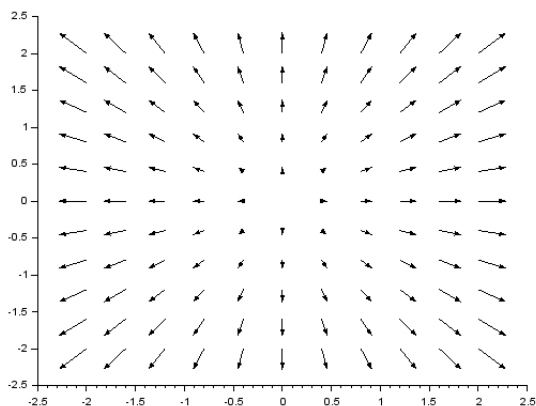
Exercice 3.

Calculer les deux dérivées premières des fonctions suivantes. Montrer qu'elles sont de classes $\mathcal{C}^1$ sur un ensemble que l'on déterminera.

1. $(x, y) \mapsto x$.
2. $(x, y) \mapsto y$.
3. $(x, y) \mapsto x + y$.
4. $(x, y) \mapsto x^2 - y^3$.
5. $(x, y) \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2)$.
6. $(x, y) \mapsto \exp(x^2 + y^2)$.
7. $(x, y) \mapsto \exp(e^x + y)$.
8. $(x, y) \mapsto \cos(x)\sin(y)$.
9. $(x, y) \mapsto \cos(x + y)$.
10. $(x, y) \mapsto x^\alpha y^{1-\alpha}$ avec $\alpha \in]0; 1[$.

Exercice 4.

Pour les fonctions de l'exercice 1 nous avons tracé les gradients. Associer chaque gradient à sa fonction.



Exercice 5.

Calculer le gradient puis donner l'approximation par des petites variations en $(1, 1)$ et l'équation du plan tangent. des fonctions suivantes

1. $(x, y) \mapsto xy$
2. $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$
3. $(x, y) \mapsto x^2 - y^2 + xy$
4. $(x, y) \mapsto x^2 y^2 + xy^3$
5. $(x, y) \mapsto \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$
6. $(x, y) \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2)$

Exercice 6.

Reprendre l'exemple précédent en remplaçant $(1, 1)$ par $(1, -1)$.

Dérivées d'ordre 2

Exercice 7.

Reprendre l'exercice 3 et calculer les dérivées partielles secondes des fonctions.

Problèmes

Exercice 8.

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$$

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f .
- (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$. Calculer $m = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$

2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f .

3. (a) Développer $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$.

(b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$$

(a) Utiliser la question 3) pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$.

(b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 9.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = xe^{x(y^2+1)}$

1. (a) Déterminer les dérivées partielles premières de f

(b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.

2.

3. Déterminer les dérivées partielles secondes de f .

4. (a) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq xe^x$.

(b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$, conclure que le point critique trouvé à la question 2b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10.

On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (1+x+y)^2 - (1+x-y)^2 \end{aligned}$$

1. Trouver tous les points critiques de f .

2. tracer le tableau de variations de

$$h : t \mapsto f(-1+t, t) \quad g : t \mapsto f(-1+t, -t) \quad k : t \mapsto f(-1+t, 0)$$

3. Le point $(-1, 0)$ est-il un extremum de f ?

Exercice 11 (▲).

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x, y) \in]0; +\infty[\times]0; +\infty[, \quad f(x, y) = e^{x+4y} \ln(xy)$$

On admet que l'ensemble de définition de f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Étude des zéros de φ .

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

RÉPONSE:

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \left(2x \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right)$$

Or par croissances comparées

$$\lim_{0^+} x \ln\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

donc par opérations

$\lim_{0^+} \varphi = +\infty$, la courbe représentative de φ admet une asymptote verticale

✱

2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

RÉPONSE:

Cette première limite n'est pas une forme indéterminée

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$

Une utilisation des croissances comparées montre que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$

La courbe n'admet pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$, on peut dire que la courbe admet une *branche parabolique d'axe Ox* (notion hors programme).

✱

3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa dérivée.

RÉPONSE:

Par opérations sur des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ et pour } x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

4. Dresser le tableau de variation de φ , faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

RÉPONSE:

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\varphi'(x) = \frac{2x-1}{x^2}$$

On en déduit

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
signe de $\varphi'(x)$	-	0	+
φ	$+\infty$	$\varphi(1/2)$	$+\infty$

5. On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que :

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$

RÉPONSE:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = -4\ln 2 + \frac{1}{2}$$

D'après l'indication cette quantité est négative.

La fonction φ est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, de plus $0 \in]\varphi(1/2); +\infty[$ donc d'après le théorème de la bijection, il existe un (unique) réel β dans $]1/2; +\infty[$ tel que $\varphi(\beta) = 0$. De même en appliquant le théorème de la bijection sur $]0; 1/2[$ on prouve l'existence de α .

6. Proposer un programme en python permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2} . On utilisera le procédé de dichotomie.

RÉPONSE:

```
import numpy as np

def phi(x):
    return np.log(x)
def dichotomie(f,a,b,eps):
    while b-a>eps:
        c=(a+b)/2
        if f(c)*f(a)<0: #signe contraire
            b=c
        else:
            a=c
    return a,b
print(dichotomie(phi,0.0001,0.5,10**-2))
```

Points critiques de f sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

RÉPONSE:

La fonction $(x, y) \mapsto xy$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \ln t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition $(x, y) \mapsto \ln(xy)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$. On montre de la même façon que $(x, y) \mapsto \exp(x+4y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$. Par produit

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x , et y strictement positifs

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{x}e^{x+4y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4f(x, y) + \frac{1}{y}e^{x+4y} \end{cases}$$

RÉPONSE:

Soit (x, y) dans l'ensemble de définition de f

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 1 \times e^{x+4y} \ln(xy) + e^{x+4y} \frac{y}{yx} && \text{dérivée produit} \\ &= f(x, y) + e^{x+4y} \frac{1}{x} \end{aligned}$$

De même pour la deuxième dérivée première

$$\text{Pour } (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{x}e^{x+4y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4f(x, y) + \frac{1}{y}e^{x+4y} \end{cases}$$

✳

3. Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

RÉPONSE:

Attention : On ne demande pas de trouver tous les points critiques mais de vérifier que les deux points donnés sont des points critiques.

On remarque que les points $\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right)$ sont dans $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

En utilisant le résultat précédent

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) &= f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) + \frac{1}{\alpha}e^{2\alpha} \\ &= e^{2\alpha} \ln\left(\frac{\alpha^2}{4}\right) + \frac{1}{\alpha}e^{2\alpha} && \text{définition de } f \\ &= e^{2\alpha} \ln\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{\alpha}e^{2\alpha} \\ &= e^{2\alpha} \left(2 \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{\alpha}\right) \\ &= e^{2\alpha} \varphi(\alpha) \\ &= 0 && \text{définition de } \alpha \end{aligned}$$

On montre de même que

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right) = 0$$

les points $\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

✳

4. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ et établir que :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = 16 \frac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{4}{\alpha}e^{2\alpha} \end{cases}$$

RÉPONSE:

Pour (x, y) dans le domaine de définition

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(f(x, y) + \frac{1}{x} e^{x+4y} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{1}{x^2} e^{x+4y} + \frac{1}{x} e^{x+4y} \\ &= f(x, y) + \frac{1}{x} e^{x+4y} - \frac{1}{x^2} e^{x+4y} + \frac{1}{x} e^{x+4y}\end{aligned}$$

question 2, écriture peu rigoureuse

linéarité, dérivée d'un produit

question 2, cette forme n'est pas utile pour la suite

Pour $(x, y) \in]0; +\infty[^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{x} e^{x+4y} - \frac{1}{x^2} e^{x+4y} + \frac{1}{x} e^{x+4y}$

En utilisant l'avant dernière forme obtenue :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) + \frac{1}{\alpha^2} e^{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} e^{2\alpha} \\ &= 0 + \frac{1}{\alpha^2} e^{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} e^{2\alpha}\end{aligned}$$

car $\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right)$ point critique

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\alpha-1}{\alpha^2} e^{2\alpha}$$

Les autres calculs sont similaires



Exercice 12 (Fonctions homogènes $\blacktriangle$).

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- On définit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(tx, ty)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
- On suppose désormais que f est homogène, c'est à dire $f(tx, ty) = t f(x, y)$ pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y.$$

(b) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y.$$

(c) Étudier la réciproque.

Exercice 13 (Fonctions invariantes par translation $\blacktriangle$).

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , et vérifiant :

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3, f(x+t, y+t) = f(x, y).$$

Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Exercice 14 (Fonctions harmoniques $\blacktriangle$ $\blacktriangle$).

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, est dite harmonique si pour tout (x, y)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Dans toute la suite, on fixe f une fonction harmonique.

- On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^3$. Démontrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
- On suppose désormais que f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est radiale, c'est-à-dire qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$. Démontrer que φ' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
- En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.