

Exercice

On considère la fonction f définie sur l'ouvert de $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{+*} \quad f(x, y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

La première partie consiste en l'étude des extrema éventuels de la fonction f , et la deuxième partie a pour objectif l'étude d'une suite implicite définie à l'aide de la fonction f .

Ces deux parties sont indépendantes.

Partie A

- On utilise python pour tracer les lignes de niveau de la fonction f . On obtient le graphe suivant :
Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f , dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.

RÉPONSE:

La fonction semble admettre un minimum local aux environs du point $(1,1)$, dont la valeur est environ 3

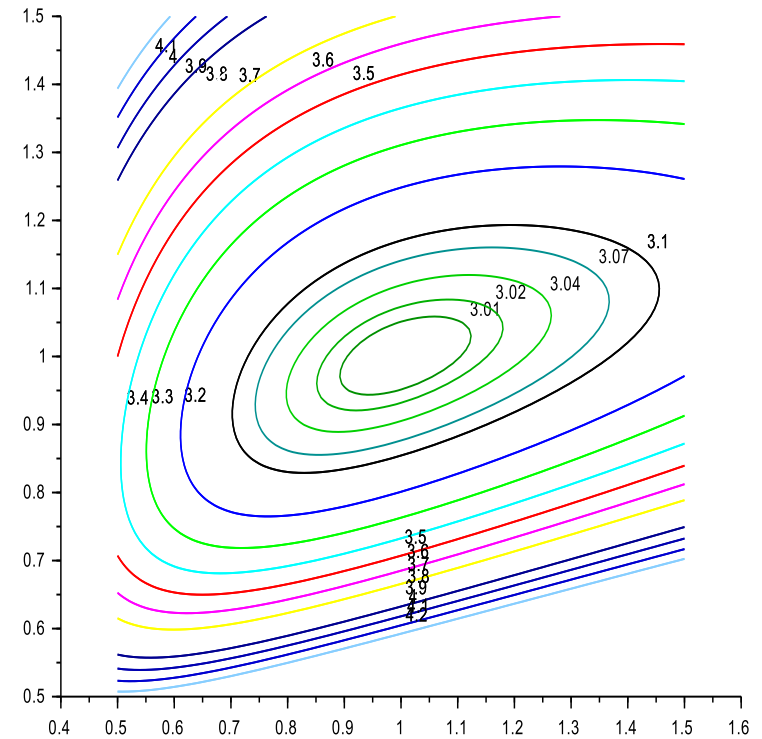


- (a) Démontrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{+*}$.

RÉPONSE:

La fonction $(x, y) \mapsto \frac{x}{y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ comme quotient défini de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. De même pour $(x, y) \mapsto \frac{1}{x}$ et $(x, y) \mapsto y^2$ qui est polynomiale

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{+*}$.



- Calculer les dérivées partielles premières de f , puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A , que l'on déterminera.

RÉPONSE:

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{+*}$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2\frac{x}{y^3} + 2y$.

Soit x et y strictement positifs

$$(x, y) \text{ point critique} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = 10 \\ -2\frac{x}{y^3} + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 \\ -2\frac{x}{y^3} + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ -2\frac{x}{y^3} + 2y = 0 \end{cases} \quad \text{car } x \text{ et } y \text{ sont positifs}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ -2\frac{y}{y^3} + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y^4 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{car } y > 0$$

Le seul point critique est $(1, 1)$.

(c) Calculer les dérivées partielles secondes de f .

RÉPONSE:

$$\text{Pour } (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{6x}{y^4} + 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{2}{y^3}$$

Partie B

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0 \quad h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

RÉPONSE:

h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad h'_n(x) = nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}}$$

Soit x réel strictement positif

$$h'_n(x) > 0 \Leftrightarrow nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}} > 0$$

$$\Leftrightarrow x^{n-1} - \frac{1}{x^{n+1}} > 0 \quad \text{car } n > 0$$

$$\Leftrightarrow x^{2n} - 1 > 0 \quad \text{car } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x^{2n} > 1$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \quad \text{car } x > 0$$

2. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation : $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

RÉPONSE:

h_n est continue et strictement décroissante sur $]0; 1[$ et $\lim_{x \rightarrow 0} h_n(x) = +\infty$ et $h_n(1) = 3$ donc d'après le théorème de la bijection monotone il existe une unique réel u_n dans $]0; 1[$ tel que $h_n(u_n) = 4$. De même h_n est continue strictement croissante sur $]0; +\infty[$ $h_n(1) < 4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = +\infty$ donc d'après le théorème de la bijection monotone il existe un unique réel v_n de $]1; +\infty[$ tel que $h_n(v_n) = 4$.

On constate aussi que 1 n'est pas solution de cette équation.



$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4$$



3. (a) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) - h_n(x) &= x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - 1 - \frac{1}{x^n} \\ &= x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - \frac{1}{x^n} \\ &= \frac{x^{2n+2}}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+1}} - \frac{x^{2n+1}}{x^{n+1}} - \frac{x}{x^{n+1}} \\ &= \frac{x^{2n+2} + 1 - x^{2n+1} - x}{x^{n+1}} \\ &= \frac{x^{2n+2} - x^{2n+1} + 1 - x}{x^{n+1}} \\ &= \frac{x^{2n+1}(x-1) + 1 - x}{x^{n+1}} \\ &= \frac{(x^{2n+1}-1)(x-1)}{x^{n+1}} \end{aligned}$$



(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Dans l'égalité précédente en prenant $x = v_n$

$$h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) = \frac{(v_n^{2n+1}-1)(v_n-1)}{v_n^{n+1}}$$

Or comme $v_n > 1$ la quantité de droite est positive et donc

$$h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) > 0$$

Par définition de v_n $h_n(v_n) = 4$

(c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

RÉPONSE:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$h_{n+1}(v_n) \geq 4$$

donc

$$h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$$

et comme h_{n+1} est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et que v_n et v_{n+1} sont dans cet intervalle.

$$v_n \geq v_{n+1}$$

$$(v_n) \text{ est décroissante}$$



4. (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.

RÉPONSE:

La suite est décroissante et minorée par 1, donc d'après le théorème de la limite monotone (v_n) converge vers un réel $\ell \geq 1$.

$$(v_n) \text{ converge vers un réel } \ell \geq 1.$$



(b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^n = +\infty$.
En déduire une contradiction.

RÉPONSE:

Supposons que $\ell > 1$

Comme la suite est décroissante de limite ℓ , pour $n \in \mathbb{N}$

$$v_n \geq \ell^n > 0$$

et donc

$$v_n^n \geq \ell^n > 0$$

Comme $\ell > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell^n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^n = +\infty$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$h_n(v_n) = 4$$

donc

$$v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n} = 4$$

En utilisant le résultat précédent et en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente on obtient

$$+\infty + 1 + 0 = 4$$

Supposer $\ell > 1$ amène à une contradiction.

✱

(c) Déterminer la limite de (v_n) .

RÉPONSE:

On sait que $\ell \geq 1$ et que $\ell > 1$ est impossible donc

$$\ell = 1$$

✱

5. (a) Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad v_n \leq 3$

RÉPONSE:

On constate que $h_n(3) = 3^n + 1 + \frac{1}{3^n} > 3 + 1$ on a donc

$$h_n(v_n) < h_n(3)$$

et comme h_n est croissante sur $]1; +\infty[$

$$\forall n \geq 1 \quad v_n \leq 3$$

✱

- (b) Écrire une fonction python d'en-tête `def h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}^{+*}$ en entrée.

RÉPONSE:

```
def h(n,x):
    return x**n+1+1/(x**n)
```

✱

- (c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```
def v(n):
    a=1
    b=3
    while (b-a)>10**(-5):
        c=(a+b)/2
        if h(n,c)>4:
            b=c
        else:
            a=c

    return a
```

- (d) À la suite de la fonction `v`, on écrit le code suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
Y=[]
```

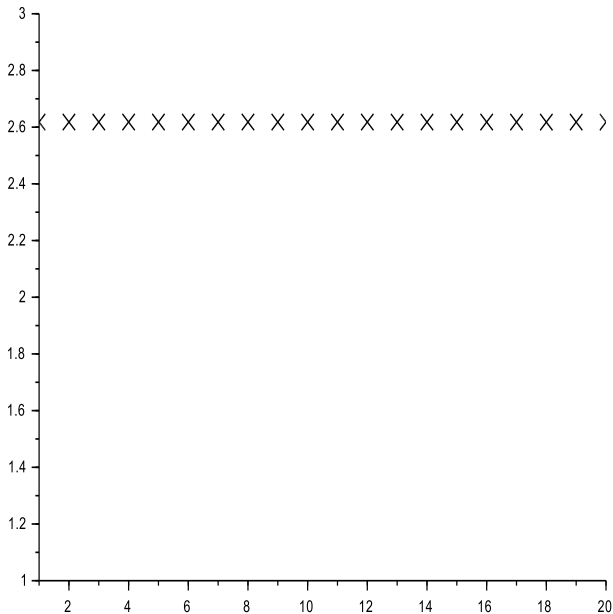
```
for k in range(1,21):
    Y.append(v(k)**k)
```

```
plt.plot(Y)
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :

Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.

Que peut-on conjecturer?



RÉPONSE:

Le programme calcule des valeurs approchées de v_n^n pour $n \in \llbracket 1, 20 \rrbracket$, les stockant dans une liste puis les affiche sous forme de graphe. La suite (v_n^n) semble être constante.

✱

(e) Montrer que : $\forall n \geq 1, \quad (v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a $h_n(v_n) = 4$ donc

$$v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n} = 4$$

en posant $u = v_n^n$

$$u + 1 + \frac{1}{u} = 4$$

donc u vérifie l'équation

$$u^2 + u + 1 = 4u$$

i.e.

$$u^2 - 3u + 1 = 0$$

Après résolution les deux solutions de cette équation sont $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

On sait que

$$2 < \sqrt{5}$$

donc

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$$

Comme v_n est plus grand que 1, on obtient que

$$\forall n \geq 1, \quad (v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

✱

(f) Retrouver ainsi le résultat de la question 4) c.

RÉPONSE:

Pour n entier naturel non nul

$$v_n = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{1}{n}} = \exp \left(\frac{1}{n} \ln \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \right)$$

$$\lim v_n = e^0 = 1$$

✱

Exercice facultatif : préparation ENS

1. Par opérations g est dérivable sur son ensemble de définition et

$$\forall h \in]0; +\infty[\quad g'(h) = -\frac{\alpha}{h^2} + \frac{\beta}{2}$$

Pour $h \in \mathbb{R}_+^*$

$$g'(h) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{h^2} + \frac{\beta}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow h^2 > \frac{2\alpha}{\beta} \quad \text{car } \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow h > \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}} \quad \text{fonction racine strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

h	0	$\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}$	$+\infty$
$g'(h)$		-	0
			+
g			

g atteint un minimum en $\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}$, et ce minimum a pour valeur $\sqrt{2\alpha\beta}$

2. Le résultat demandé peut nous rappeler le théorème des accroissements finis et l'indication doit nous rappeler la fonction utilisée lors de la démonstration de ce dernier.

Cherchons la constante réelle A telle que $\varphi(a) = \varphi(b)$

$$\varphi(a) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - A \frac{(b-a)^2}{2} \quad \varphi(b) = 0$$

On pose donc

$$A = \frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{\frac{(b-a)^2}{2}}$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , f' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et par opérations, la fonction φ est continue sur I et dérivable sur $] \min(a, b); \max(a, b) [$, on peut donc appliquer le théorème de Rolle et on obtient l'existence d'un réel $c \in] \min(a, b); \max(a, b) [$ tel que $\varphi'(c) = 0$

$$\forall x \in I \quad \varphi'(x) = -f'(x) + f'(x) - (b-x)f''(x) + A(b-x)$$

donc comme $b-c \neq 0$

$$f''(c) = A$$

et en réutilisant la valeur de A

$$f''(c) = \frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{\frac{(b-a)^2}{2}}$$

et donc

$$\text{Il existe } c \in] \min(a, b); \max(a, b) [\text{ tel que } f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$$

3. (a) Soit $x > 0$ un réel (fixé). On choisit h un réel et on peut donc appliquer le résultat de la question 2, il existe deux réels c_+ et c_- strictement positifs tels que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c_+) \quad f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c_-)$$

En soustrayant ces deux égalités

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^2}{2} (f''(c_+) - f''(c_-))$$

donc comme $h \neq 0$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h}{4} (f''(c_+) - f''(c_-))$$

donc en utilisant l'inégalité triangulaire et la définition de M_0 et M_2

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0 + M_0}{2h} + \frac{h}{4} (M_2 + M_2)$$

ce qui démontre que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2$$

On a donc démontré que $|f'|$ est une fonction majorée sur $\mathbb{R}$ et que

$$\text{Pour tout } h \in \mathbb{R}_+^* \text{ un majorant de } |f'| \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2$ est un majorant de $|f'|$ sur $\mathbb{R}$. On peut appliquer le résultat de la question 1 car les deux constantes M_0 et M_2 sont strictement positives. Il existe un h_0 pour lequel la quantité précédente est minimale et est aussi un majorant de $|f'|$.

$$\sqrt{2M_0M_2} \text{ est un majorant de } |f'|.$$

- (b) Soit x un réel. D'après la question appliquer entre x et $x+1$, il existe $c(x)$ un réel tel que

$$x < c(x) < x+1 \quad f'(x) = f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2}f''(c(x))$$

En utilisant le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = +\infty$ En passant à la limite dans l'égalité précédente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$$