

SUITES ET SÉRIES

Suites classiques

Exercice 1.

Donner le terme général des suites suivantes, puis donner une fonction python `suite(n)` qui renvoie la valeur du nième terme de la suite.

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n$.
2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 4$.
3. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 1$.
4. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
5. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
6. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

Exercice 2 (Sommes classiques).

1. Soit a un réel, on défini la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n $u_{n+1} = au_n$. Soit p et n deux entiers tels que $p \leq n$, calculer

$$\sum_{k=0}^n u_k \quad \text{puis} \quad \sum_{k=p}^n u_k$$

Puis écrire des fonctions python permettant de calculer ces sommes sans utiliser les calculs théoriques que vous venez de faire.

2. Soit b un réel, on défini la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n $u_{n+1} = u_n + b$. Soit p et n deux entiers tels que $p \leq n$, calculer

$$\sum_{k=p}^n u_k$$

Exercice 3 (Somme des termes d'une suite $\blacktriangle$).

1. Soit la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$$

Exprimer le terme général de la suite puis calculer pour n entier la somme $\sum_{k=0}^n u_k$

2. Soit la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 1 \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = -u_n$$

Exprimer le terme général de la suite puis calculer pour n entier la somme $\sum_{k=0}^n u_k$

Limite de Suites

Exercice 4.

Calculer les limites en $+\infty$ des suites dont le terme général est donné par les expressions suivantes.

1. $n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$
2. $n^2 \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)$
3. $\sqrt{n} \ln \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2} \right)$
4. $\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$
5. $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{3n}$
6. $(\cos(1/n))^n$

Exercice 5.

Calculer les limites en $+\infty$ des suites dont le terme général est donné par les expressions suivantes.

1. $\ln \left(\frac{n+1}{n^2+1} \right) \frac{1}{n}$
2. $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$
3. $\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$
4. $(1+n)^{\frac{n}{1+n^2}}$
5. $\frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$
6. $\frac{\sin n}{n}$
7. $n \sin \left(\frac{1}{n} \right)$
8. $n \tan \left(\frac{1}{n} \right)$

Exercice 6 (Suite définie par récurrence $\blacktriangle \blacktriangle$).

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 - u_n^2$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) \mapsto 1 - x^2$. Déterminez les solutions $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation

$$f(x) = x \quad (\text{E.1})$$

2. Quelles sont les limites possibles de la suite u ? Par la suite, on convient de noter α (resp. β) la solution négative (resp. positive) de l'équation (1).
3. On suppose dans cette question que $a \in [0, \beta[$

- (a) Démontrez que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{2n} \in [0, \beta[\text{ et } u_{2n+1} \in]\beta, 1]$$

- (b) Démontrez que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
 - (c) En déduire qu'elles sont convergentes et précisez leurs limites.
 - (d) La suite u est-elle convergente?
4. Étudiez de même le comportement de la suite u lorsque $a \in]\beta, 1]$.

Exercice 7.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1}$$

1. Justifiez que (u_n) est bien définie.
2. Étudiez les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ et le signe de $f(x) - x$.
3. On suppose $a > 1$. Montrez que pour tout entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 2(1+\sqrt{2})$. Montrez que la suite est croissante et déterminez sa limite.

Exercice 8.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{3 - u_n}$$

1. Méthode 1
Utilisation d'une suite auxiliaire :
Considérons la suite auxiliaire $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$
 - (a) Démontrez que v est une suite géométrique.
 - (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 - (c) Montrez que u est convergente et précisez sa limite.
2. Méthode 2.
Utilisation d'une inégalité :
 - (a) Montrer que les termes de (u_n) sont tous strictement négatifs.
 - (b) Montrez que la suite u vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| \leq \frac{2}{3} |u_n|$$

- (c) En déduire que u converge et déterminez sa limite.
- (d) Déterminez un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert $] -10^{-2}, 10^{-2} [$.

Exercice 9 (Suite implicite).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n cette équation possède une solution unique notée x_n .
2. En utilisant la croissance stricte de la fonction $x \mapsto x + \tan x$ sur l'intervalle considéré, montrer que la suite est monotone et donner sa monotonie.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Séries

Exercice 10 (Calcul de sommes par télescopage).

Calculer la somme des séries suivantes.

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$2. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

$$3. \sum_{n \geq 2} \ln \left(\frac{1+n}{n-1} \right)$$

$$4. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Dans chacun des cas écrire une fonction python `sommeapartielle(n)` qui calcule la somme partielle de rang n .

Exercice 11 (Calcul de sommes par télescopage ▲).

Calculer la somme des séries suivantes.

$$1. u_n = \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \quad (n \geq 0)$$

$$2. \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right)$$

Exercice 12 (Calcul de somme; série de références).

Calculer, si elles convergent, la somme totale des séries suivantes

$$1. \sum_{n \geq 0} n \frac{x^n}{2^n}$$

$$6. \sum_{n \geq 0} n \frac{x^n}{n!} \text{ avec } x \text{ réel}$$

$$2. \sum_{n \geq 2} \frac{3}{7^n}$$

$$7. \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$$

$$3. \sum_{n \geq 0} n q^n \text{ avec } q \text{ réel}$$

$$8. \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)}{n!}$$

$$4. \sum_{n \geq 0} n(n-1) q^n \text{ avec } q \text{ réel}$$

$$9. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!}$$

$$5. \sum_{n \geq 0} n^2 q^n \text{ avec } q \text{ réel}$$

Exercice 13 (Théorème de comparaison).

Les séries suivantes sont-elles convergentes?

$$1. \sum \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}$$

$$4. \sum \frac{e^n}{n^{100}}$$

$$2. \sum \frac{1}{n-1}$$

$$5. \sum e^{-\sqrt{\ln n}}$$

$$3. \sum \frac{1}{n! + n^2}$$

Exercice 14 (Convergence absolue).

Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes?

$$1. \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

$$4. \frac{1}{8} - \frac{2}{12} + \frac{3}{16} - \frac{4}{20} + \dots$$

$$2. \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)}$$

$$5. \sum \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$

$$3. 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots$$

$$6. \sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

Exercice 15 (Convergence absolue).

Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes?

1. $\sum \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$
2. $\sum \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^n$
3. $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$
4. $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$
5. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$
6. $\sum \frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$
7. $\sum (-1)^n \frac{2^n}{n^2}$
8. $\sum \frac{(-1)^n n}{e^n}$
9. $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$
10. $\sum \frac{\cos(n)}{n^2 - 1}$
11. $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$

Exercice 16.

Calculer la somme des séries dont le terme général est

1. $\frac{n^2 - n}{(n+3)!}$
2. $\frac{(n+2)(n+1)}{2^{n+3}}$

Exercice 17 (▲ Convergence absolue des séries de références). 1. Montrer que les séries géométriques et dérivées convergent **absolument** sur $] -1; 1[$.

2. Montrer que la série exponentielle converge **absolument** sur $\mathbb{R}$.

Problèmes

Suites définies par récurrence

Exercice 18.

On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geq 0$.

1. Étudier f et le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possible de (u_n) ?
2. On suppose $u_0 \in [0; 1/4]$. Montrer que pour tout $u_n \in [0; 1/4]$ puis que (u_n) est croissante.
3. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite)?
4. On suppose $u_0 \in [1/4; 3/4]$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite)?
5. On suppose $u_0 > 3/4$. Montrer que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite)?

Exercice 19 (Suite récurrente et fonction logarithme).

On note f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln x$. Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 \geq 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que la suite est bien définie et qu'elle est minorée par 1.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1; +\infty[$.
3. Étudier la monotonie de u .
4. En déduire que (u_n) est convergente, et donner sa limite.

Exercice 20 (Suite définie par récurrence et série!).

Soit u la suite définie par

$$u_0 \in]0; 1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que pour tout entier n on a $u_n \in]0; 1[$.

2. Montrer que la suite u est décroissante et étudier sa limite.
3. Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente et calculer sa somme.
4. En calculant les sommes partielles, montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
5. Trouver un équivalent de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et en déduire que la nature de la série $\sum u_n$.

Exemples de suites définies implicitement

Exercice 21.

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = x - n \cdot \ln(x)$.

1. (a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
(b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.
2. Etude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.
(a) Montrer que $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.
(b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
(c) En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
(d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 22.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + n \cdot x$.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.
(b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n .
(b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{-1}{n} < u_n < 0$.
(c) En déduire la limite de la suite (u_n) .
(d) En revenant à la définition de u_n , montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$.

Exercice 23 (Sans indication!).

Soit $n \in \mathbb{N}$, Montrer que l'équation $xe^x = n$ possède dans $\mathbb{R}_+$, une unique solution x_n . Étudier la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Autres

Exercice 24.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$$

1. Écrire une fonction `suite(n)` qui calcule le terme n de cette suite.

- Montrer que $\lim u_n = +\infty$
- Trouver une relation simple entre u_n et u_{n+1} .
- Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq n$ et que $u_n = o(n)$
- Trouver un équivalent simple de (u_n) .
- Trouver la limite de $u_n - \sqrt{n}$

Exercice 25.

On pose pour n entier strictement plus grand que 1

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k}$$

- Montrer que $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
- En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- La série converge-t-elle absolument?

Résultats hors programme ▲

Exercice 26 (Série de Riemann).

Les séries de Riemann sont les séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où α est une constante. Les cas vus en cours sont $\sum \frac{1}{n}$ où α vaut 1 et $\sum \frac{1}{n^2}$ où α vaut 2.

- $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est elle une série de Riemann?
- $\sum \sqrt{n}$ est elle une série de Riemann?
- $\sum \frac{1}{n^n}$ est elle une série de Riemann?
- On veut démontrer la proposition suivante « La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. »
 - Montrer que si $\alpha \leq 0$ alors la série diverge.
 - En s'inspirant de la démonstration vu en cours pour les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ démontrer les autres cas

Exercice 27 (Comparaison cas $= o()$).

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit (u_n) est négligeable devant (v_n) au voisinage de l'infini si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

On veut démontrer le résultat suivant

« Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs et telles que :

$$u_n = o(v_n)_{n \rightarrow +\infty}$$

- Si de plus la série $\sum v_n$ est convergente alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si de plus la série $\sum v_n$ est divergente alors la série $\sum u_n$ est divergente.

»

On suppose que $u_n = o(v_n)$ au voisinage de $+\infty$

- Démontrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $n \geq n_0$ alors $u_n \leq v_n$.
- Conclure.

Exercice 28 (Une série exponentielle).

On rappelle que $0! = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

- Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
- Montrer que pour tout naturel n , $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$.
 - Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de u_{n-1} et de n .
 - En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$$

- Des questions précédentes, déduire la limite de $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 29 (Critère de d'Alembert).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une série à termes strictement positifs, on suppose de plus que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in \mathbb{R}$$

- On suppose dans cette question que $\lambda \in [0; 1[$, et on note $\mu = \frac{\lambda+1}{2}$
 - Montrer que $\lambda < \mu < 1$
 - Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0

$$u_{n+1} \leq \mu u_n$$

- En déduire que pour tout entier n plus grand que n_0

$$u_n \leq \mu^{n-n_0} u_{n_0}$$

- En déduire que la série $\sum u_n$ converge
- On suppose maintenant que $\lambda > 1$
 - Montrer qu'il existe un réel μ et un entier naturel n_0 tel que pour tout entier plus grand que n_0

$$u_n \geq \mu^{n-n_0} u_{n_0}$$

- En déduire la nature de $\sum u_n$

- En utilisant les résultats précédents étudier la nature des séries de terme général $\frac{x^n}{n!}$ et $\frac{n^n}{n!}$