

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Exercice 1

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et, comme $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2a} = 0$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = -\infty$.

De plus, pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = x^{2a} \left(\frac{\ln(x)}{x^{2a}} - a \right)$.

D'après la règle des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{2a}} - a = -a$. Et, comme $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2a} = +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$.

2. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ par somme de fonction usuelles dérivables. Pour tout $x > 0$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2 x^{2a-1} = \frac{1 - 2a^2 x^{2a}}{x}.$$

$\varphi'(x)$ est donc du signe de $1 - 2a^2 x^{2a}$ (car $x > 0$). Or

$$\begin{aligned} 1 - 2a^2 x^{2a} > 0 &\Leftrightarrow x^{2a} < \frac{1}{2a^2} && \text{car } 2a^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x < \left(\frac{1}{2a^2} \right)^{1/2a} && \text{fonction } t \mapsto t^{1/2a} \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*}. \end{aligned}$$

Donc nous avons le tableau suivant :

x	0	x_0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	-
φ		$\varphi(x_0)$	
	$-\infty$		$-\infty$

avec $\varphi(x_0) = -\frac{1}{2a} \ln(2a^2) - \frac{1}{2a} = -\frac{\ln(2a^2) + 1}{2a}$.

3. Si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, alors $1 + \ln(2a^2) < 0$ donc $\varphi(x_0) > 0$.

La fonction φ est continue et strictement croissante sur $]0; x_0]$ donc, d'après le théorème de bijection monotone, φ réalise une bijection de $]0; x_0]$ sur $] -\infty; \varphi(x_0)]$.

Or $0 \in] -\infty; \varphi(x_0)]$ (car $\varphi(x_0) > 0$) donc 0 admet un unique antécédent par φ dans $]0; x_0]$ ce qui signifie que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; x_0]$ que nous noterons z_1 .

De même on montre que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $]x_0; +\infty[$ que l'on note z_2 .

Or $\varphi(x_0) \neq 0$ donc $z_1 \neq x_0$.

En conclusion, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet bien uniquement 2 solutions qui vérifient $z_1 < x_0 < z_2$.

Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$, $\varphi(x_0) < 0$ donc $\forall x > 0$, $\varphi(x) < 0$ et donc l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet pas de solutions.

Si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$, $\varphi(x_0) = 0$ et pour $x \neq x_0$, $\varphi(x) < 0$ donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution, le réel x_0 .

Partie B : Une fonction de deux variables

4. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc, par produit, la fonction $(x, y) \mapsto \ln(x) \ln(y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

La fonction $(x, y) \mapsto (xy)^a$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

Donc, par somme, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

5. Pour tout $(x, y) \in U$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\ln(y)}{x} - ax^{a-1}y^a} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} - ax^ay^{a-1}}.$$

6. Par définition de la notion de point critique on a :

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ est un point critique de } f &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(y)}{x} - ax^{a-1}y^a = 0 \\ \frac{\ln(x)}{y} - ax^ay^{a-1} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(y)}{x} - ax^{a-1}y^a = 0 \\ \ln(x) - \ln(y) = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow yL_2 - xL_1 \quad (\text{car } y \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x} - ax^{2a-1} = 0 \\ x = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = 0 \quad \text{car } x \neq 0 \\ x = y. \end{cases} \end{aligned}$$

7. (a) f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le pavé ouvert U donc, d'après notre cours, on sait que les seuls points où f est susceptible d'admettre un extremum sont les points critiques.

D'après la question précédente et la question 3., dans le cas où $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2) .

En conclusion les seuls points où f est susceptible d'admettre un extremum sont (z_1, z_1) et (z_2, z_2) .

(b) Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$, f n'admet pas de point critique donc n'admet pas d'extremum.

Si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$, f admet un unique point critique (x_0, x_0) , c'est le seul point où f est susceptible d'admettre un extremum.

Partie C : Extremum locaux de f

8. f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur le pavé ouvert U , d'après le théorème de Schwarz, les dérivées "croisées" sont égales. Pour tout $(x, y) \in U$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{\ln(y)}{x^2} - a(a-1)x^{a-2}y^a}, \quad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{\ln(x)}{y^2} - a(a-1)x^ay^{a-2}},$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1}}.$$

9. D'après la définition de z_1 on a $\varphi(z_1) = 0$ donc $\ln(z_1) = az_1^{2a}$. Ainsi, d'après la question précédente :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_1, z_1) = -\frac{az_1^{2a}}{z_1^2} - a(a-1)z_1^{2a-2} = -\frac{az_1^{2a} + a(a-1)z_1^{2a}}{z_1^2} = -az_1^{2a-2}.$$

Par symétrie des rôles de x et y , on a immédiatement $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_1, z_1) = -az_1^{2a-2}$.

Et enfin, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_1, z_1) = \frac{1}{z_1^2} - a^2z_1^{2a-2}$.

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_1, z_1) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_1, z_1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_1, z_1) \right)^2 &= (-az_1^{2a-2})^2 - \left(\frac{1}{z_1^2} - a^2z_1^{2a-2} \right)^2 \\ &= \left[az_1^{2a-2} - \left(\frac{1}{z_1^2} - a^2z_1^{2a-2} \right) \right] \times \left[az_1^{2a-2} + \frac{1}{z_1^2} - a^2z_1^{2a-2} \right] \\ &= \frac{2az_1^{2a} - 1}{z_1^2} \times \frac{1}{z_1^2} = -\frac{\varphi'(z_1)}{z_1^3}. \end{aligned}$$

On a donc bien
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_1, z_1) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_1, z_1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_1, z_1) \right)^2 = -\frac{\varphi'(z_1)}{z_1^3}.$$

10. f étant une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un pavé ouvert, on peut utiliser le résultat admis.

On sait que $z_1 \in]0; x_0[$ et que φ est strictement croissante sur $]0; x_0[$.

Donc $\varphi'(z_1) > 0$ et $z_1^3 > 0$, ainsi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_1, z_1) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_1, z_1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_1, z_1) \right)^2 < 0$.

Donc f n'admet pas d'extremum local en (z_1, z_1) .

11. z_1 et z_2 vérifient la même relation $\varphi(z_i) = 0$. On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_2, z_2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_2, z_2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_2, z_2) \right)^2 = -\frac{\varphi'(z_2)}{z_2^3}.$$

Par le même raisonnement que dans la question précédente, on peut justifier que $\varphi'(z_2) < 0$ (φ est strictement décroissante sur $]x_0; +\infty[$) et $z_2^3 > 0$. Donc $-\frac{\varphi'(z_2)}{z_2^3} > 0$

Donc, d'après le résultat admis, f admet un extremum local en (z_2, z_2) .

De plus, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_2, z_2) = -az_2^{2a-2} < 0$, car $a > 0$ et $z_2 > 0$, donc f admet en (z_2, z_2) un maximum local.

Exercice 2

I. Étude de la fonction f

1. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a $f'(x) = 1 + 2e^x$. Comme $e^x > 0$ on a pour tout réel x , $f'(x) > 0$ et donc f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

— En $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

— En $-\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. On remarque que $f(x) - (x + 1) = 2e^x$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 1)) = 0$ c'est-à-dire que :

la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

De plus pour tout réel x , $f(x) - (x + 1) = 2e^x > 0$ donc la courbe représentative de f est située au dessus de son asymptote.

3. (a) f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (somme d'une fonction affine et d'une fonction exponentielle) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de bijection monotone, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. D'après les calculs de limite $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, il admet un unique antécédent α par f , c'est-à-dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .

- (b) on a $f(-1) = 2e^{-1} > 0$ et $f(-2) = -1 + 2e^{-2}$. Or on sait que $2 < e < 3$ donc $\frac{1}{9} < e^{-2} < \frac{1}{4}$ et donc $f(-2) < 0$.

On a donc $f(-2) \leq f(\alpha) \leq f(-1)$ et comme f^{-1} est croissante, $-2 \leq \alpha \leq -1$, c'est-à-dire que $\alpha \in [-2; -1]$.

II. Recherche d'extremum local de g

4. Les fonctions $(x, y) \mapsto e^x$ et $(x, y) \mapsto x + y^2$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ donc, par somme et produit, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

5. Calculons les dérivées partielles premières de g . Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = (x + y^2 + e^x + 1 + e^x)e^x = (1 + x + y^2 + 2e^x)e^x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2ye^x$$

On a donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + x + y^2 + 2e^x)e^x = 0 \\ 2ye^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (e^x \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc $\boxed{g \text{ possède un seul point critique, le point } (\alpha, 0).}$

6. (a) g étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur un pavé ouvert, d'après le théorème de Schwarz, on a $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$. Après calcul on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = (2 + x + y^2 + 3e^x)e^x \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = 2ye^x \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 2e^x.}$$

- (b) On sait que $\frac{\partial g}{\partial x}(\alpha, 0) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(\alpha, 0) = 0$.

D'après la question précédente :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\alpha, 0) = (2 + \alpha + 3e^\alpha)e^\alpha \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(\alpha, 0) = 0 \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\alpha, 0) = 2e^\alpha.$$

En remplaçant dans le résultat admis, on obtient bien que, pour (x, y) proche de $(\alpha, 0)$:

$$\boxed{g(x, y) = g(\alpha, 0) + \frac{(2 + \alpha + 3e^\alpha)e^\alpha}{2}(x - \alpha)^2 + e^\alpha y^2 + ((x - \alpha)^2 + y^2)\varepsilon(x, y).}$$

- (c) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{(2 + \alpha + 3e^\alpha)e^\alpha}{2}(x - \alpha)^2 + e^\alpha y^2 \geq 0$ (car $2 + \alpha \geq 0$).

Comme $\varepsilon(x, y)$ tend vers 0 lorsque (x, y) tend vers $(\alpha, 0)$, on peut affirmer que, pour (x, y) suffisamment proche de $(\alpha, 0)$:

$$\frac{(2 + \alpha + 3e^\alpha)e^\alpha}{2}(x - \alpha)^2 + e^\alpha y^2 + ((x - \alpha)^2 + y^2)\varepsilon(x, y) \geq 0.$$

Donc, pour (x, y) suffisamment proche de $(\alpha, 0)$, $g(x, y) \geq g(\alpha, 0)$, ce qui signifie que $\boxed{g \text{ admet un minimum local en } (\alpha, 0).}$

La valeur de ce minimum est $\boxed{\beta = g(\alpha, 0) = e^\alpha(\alpha + e^\alpha).}$

7. On sait que $e^\alpha = -\frac{\alpha + 1}{2}$. Donc :

$$\beta = -\frac{\alpha + 1}{2} \left(\alpha - \frac{\alpha + 1}{2} \right) = -\frac{\alpha + 1}{2} \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{1 - \alpha^2}{4}$$

On a donc bien $\boxed{4\beta + \alpha^2 - 1 = 0.}$

III. Étude d'une suite réelle

8. On remarque ici qu'il n'y a pas de problème pour savoir si la suite (u_n) est bien définie car $f'(x) > 0$ donc il n'y a jamais de problème dans le calcul de u_{n+1} .
9. (a) La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer qu'il en est de même pour la fonction h . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h'(x) = f'(x) + (-1) \times f'(x) + (t - x)f''(x) = (t - x)f''(x) = 2(t - x)e^x.$$

$h'(x)$ est donc du signe de $t - x$.

Ainsi $\boxed{h \text{ est croissante sur }] - \infty; t] \text{ et décroissante sur } [t; +\infty[.}$

- (b) D'après la question précédente, la fonction h admet un maximum global en t . On a donc, pour tous x et t réels :

$$h(x) \leq h(t) \Leftrightarrow \boxed{f(x) + (t - x)f'(x) \leq f(t).}$$

10. — Utilisons la question précédente avec $x = u_n$ et $t = \alpha$:

$$\begin{aligned}
 f(u_n) + (\alpha - u_n)f'(u_n) &\leq 0 && \text{car } f(\alpha) = 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} + \alpha - u_n &\leq 0 && \text{car } f'(u_n) = 1 + 2e^{u_n} > 0 \\
 \Leftrightarrow \alpha - u_{n+1} &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow \boxed{\alpha \leq u_{n+1}}.
 \end{aligned}$$

— On vient de prouver que $\alpha \leq u_{n+1}$.

De plus $u_{n+1} - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. On a déjà vu que $f'(u_n) = 1 + 2e^{u_n} > 0$.

Il nous reste à déterminer le signe de $f(u_n)$. Dans la première partie de cette question on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \alpha$ donc on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \alpha$. D'après la question 3.b), on a aussi $u_0 = -1 \geq \alpha$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \alpha$.

La fonction f étant croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $f(u_n) \geq f(\alpha) = 0$.

On en déduit donc que pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$.

Enfin, la suite (u_n) étant décroissante, elle est donc majorée par son premier terme, c'est-à-dire que $u_n \leq u_0 = -1$.

On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \leq -1}$.

11. (a) Utilisons l'inégalité admise avec $x = u_n$ car on sait que $u_n \in [\alpha; -1] \subset [-2; -1]$. On a donc

$$\begin{aligned}
 0 &\leq (u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n) \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e} \\
 \Leftrightarrow 0 &\leq u_n - \alpha - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{ef'(u_n)} && \text{car } f'(u_n) > 0 \\
 \Leftrightarrow \boxed{0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}} &&& \text{car } f'(u_n) = 1 + 2e^{u_n} \geq 1
 \end{aligned}$$

(b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : 0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n - 1}}$.

Initialisation Pour $n = 0$, on a $\frac{1}{e^{2^0 - 1}} = 1$ et comme $u_0 = -1$ et $-2 \leq \alpha \leq -1$ on a bien $0 \leq u_0 - \alpha \leq 1$.

$\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. D'après la question précédente on a donc :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{e} \times \frac{1}{(e^{2^n - 1})^2} \\
 \Leftrightarrow 0 &\leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{e} \times \frac{1}{e^{2^{n+1} - 2}} \\
 \Leftrightarrow 0 &\leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^{n+1} - 1}}.
 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.

Grâce au principe de récurrence on a bien montré que $\boxed{\text{pour tout entier } n, 0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n - 1}}}$.

12. Principe général : les termes de la suite (u_n) sont bons candidats pour être une valeur approchée de α car cette suite converge vers α . On utilise l'inégalité de la question précédente pour s'assurer que l'écart entre le u_n que nous allons choisir et α sera inférieur à 10^{-p} .

En effet, **SI** $\frac{1}{e^{2^n - 1}} \leq 10^{-p}$ **ALORS** $|u_n - \alpha| \leq 10^{-p}$.

Deux méthodes ici :

- soit on détermine « à la main » un entier n_0 tel que $\frac{1}{e^{2^{n_0} - 1}} \leq 10^{-p}$ puis on écrit une fonction qui renvoie la valeur de u_{n_0} ,
- soit on écrit une fonction Python qui renvoie la valeur du premier u_n pour lequel $\frac{1}{e^{2^n - 1}} \leq 10^{-p}$.

Voici ici la deuxième méthode :

```
import numpy as np

def f(x):
    return x+1+2*np.exp(x)

def fprime(x):
    return 1+2*np.exp(x)

def approx(p):
    u=-1
    n=0
    while 1/np.exp(2**n-1)>10**(-p):
        u=u-f(u)/fprime(u)
        n+=1
    return u
```

Exercice 2 bis

Partie I. Fonction de production CES (Constant Elasticity of Substitution).

1. (a) Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} \right)^{-1} = \left(\frac{x+y}{2xy} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Pour $(x, y) \in \mathcal{D}$, $f(x, y) = \frac{2xy}{x+y}$

Comme pour $(x, y) \in \mathcal{D}$, $x+y > 0$ la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ dont le dénominateur est non nul. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.

Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2 \frac{y(x+y) - xy \times 1}{(x+y)^2} = \frac{2y^2}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2 \frac{x(x+y) - xy \times 1}{(x+y)^2} = \frac{2x^2}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

Pour $(x, y) \in \mathcal{D}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2y^2}{(x+y)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x^2}{(x+y)^2}$

- (b) La fonction w est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient défini de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ donc w' est de classe $\mathcal{C}^1$. U est de classe $\mathcal{C}^1$ comme somme et produit de fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} U(t) &= w(t) - tw'(t) = \frac{2t}{1+t} - t \frac{2t(1+t) - 2t}{(1+t)^2} \\ &= \frac{2t}{1+t} - t \frac{2}{(1+t)^2} = \frac{2t}{1+t} \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) \\ &= \frac{2t}{1+t} \cdot \frac{t}{1+t} = 2 \frac{t^2}{(1+t)^2}. \end{aligned}$$

La limite en 0 n'est pas une forme indéterminée. Pour calculer la limite en $+\infty$, on écrit pour $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$U(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2t^2}{t^2} = 2 \quad \text{donc} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) = 2$$

En dérivant, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} U'(t) &= 2 \frac{2t(1+t)^2 - t^2 \times 2(1+t)}{(1+t)^4} \\ &= 2 \frac{2t(1+t)((1+t) - t)}{(1+t)^4} = 4 \frac{t}{(1+t)^3}. \end{aligned}$$

Cette quantité est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0	$+\infty$
$U'(x)$	+	
U	0	2

(c) Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{2xy}{x+y} = \frac{2x}{\frac{x}{y} + 1} \text{ car } y \neq 0 \\ &= \frac{2zy}{z+1} = yw(z) \end{aligned}$$

Pour $(x, y) \in \mathcal{D}$, $f(x, y) = yw(z)$.

(d) Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2y^2}{(x+y)^2} = \frac{2}{\left(\frac{x+y}{y}\right)^2} \text{ car } y \neq 0 \\ &= \frac{2}{(1+z)^2} = w'(z) \text{ calcul de } w' \text{ dans la question précédente,} \end{aligned}$$

et $U(t) = 2 \frac{t^2}{(1+t)^2}$ donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x^2}{(x+y)^2} = \frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2}{\left(\frac{x}{y} + 1\right)^2} = \frac{2z^2}{(1+z)^2} = U(z).$$

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = w'(z)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = U(z)$.

2. (a) Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$ et un réel $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (c(\lambda x)^\theta + (1-c)(\lambda y)^\theta)^{\frac{1}{\theta}} && \text{définition de CES} \\ &= (c\lambda^\theta x^\theta + (1-c)\lambda^\theta y^\theta)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= [\lambda^\theta (cx^\theta + (1-c)y^\theta)]^{\frac{1}{\theta}} && \text{factorisation} \\ &= [\lambda^\theta]^{\frac{1}{\theta}} (cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \lambda (cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}} \end{aligned}$$

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ et pour tout réel $\lambda > 0$, on a : $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.

- (b) On étudie des fonctions puissances sur $\mathbb{R}_+^*$, par somme et composée, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.
Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{\theta} (c\theta x^{\theta-1}) [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1}{\theta}-1} \\ &= cx^{\theta-1} [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1-\theta}{\theta}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{\theta} ((1-c)\theta y^{\theta-1}) [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1}{\theta}-1} \\ &= (1-c)y^{\theta-1} [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1-\theta}{\theta}}\end{aligned}$$

Pour $(x, y) \in \mathcal{D}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = cx^{\theta-1} [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1-\theta}{\theta}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (1-c)y^{\theta-1} [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1-\theta}{\theta}}$
--

- (c) Fixons y réel strictement positifs. On sait d'après l'énoncé que c et $1-c$ sont positifs, donc pour tout réel x positifs, par produit somme et puissances de nombre positifs, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est positif.

On pose pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\eta(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = cx^{\theta-1} [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

Après calcul on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \eta(x) = c \left[c + \frac{K}{x^\theta} \right]^{\frac{1-\theta}{\theta}} \quad \text{avec } K = (1-c)y^\theta \in \mathbb{R}_+^*$$

On rappelle (*vous devez savoir le démontrer*) que la composée de deux fonctions de monotonies opposées est une fonction décroissante et que sur $\mathbb{R}_+^*$ la monotonie de $x \mapsto x^\alpha$ dépend du signe de α .

- Si $\theta > 0$ alors comme par définition $\theta < 1$, $\frac{1-\theta}{\theta} > 0$ et donc $x \mapsto c + \frac{K}{x^\theta}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs strictement positives et $u \mapsto u^{\frac{1-\theta}{\theta}}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition $x \mapsto \left[c + \frac{K}{x^\theta} \right]^{\frac{1-\theta}{\theta}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ de même pour η .
- Si $\theta < 0$ alors, $\frac{1-\theta}{\theta} < 0$ et donc $x \mapsto c + \frac{K}{x^\theta}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs strictement positives et $u \mapsto u^{\frac{1-\theta}{\theta}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition $x \mapsto \left[c + \frac{K}{x^\theta} \right]^{\frac{1-\theta}{\theta}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ de même pour η .

Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est décroissante à valeurs positives sur $\mathbb{R}_+^*$.
--

Les rôles de x et y étant très semblables dans les dérivées partielles par rapport à x et y , on montre de même que

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est décroissante à valeurs positives sur $\mathbb{R}_+^*$.
--

3. (a) D'après la question précédente on peut calculer cette quantité .

Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}G(x, y) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = \frac{cx^{\theta-1} [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1-c)y^{\theta-1} [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1-\theta}{\theta}}} \quad \text{question 2b} \\ &= \frac{cx^{\theta-1}}{(1-c)y^{\theta-1}} = \frac{c}{1-c} \left(\frac{x}{y} \right)^{\theta-1} = g(z).\end{aligned}$$

Pour $(x, y) \in \mathcal{D}$, $G(x, y) = g(z)$.

(b) g est dérivable sur son ensemble de définition. Soit un réel $t > 0$,

$$\begin{aligned} s(t) &= -\frac{g(t)}{tg'(t)} = -\frac{\frac{c}{1-c}t^{-1+\theta}}{t \times (1-\theta)\frac{c}{1-c}t^{-1+\theta-1}} \\ &= -\frac{\frac{c}{1-c}t^{-1+\theta}}{(-1+\theta)\frac{c}{1-c}t^{-1+\theta}} = \frac{1}{1-\theta}. \end{aligned}$$

Donc pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $s(t) = \frac{1}{1-\theta}$; l'élasticité de substitution est constante.

4. Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f\left(y\frac{x}{y}, y \times 1\right) \\ &= yf\left(\frac{x}{y}, 1\right) \text{ question 2a avec } \lambda = y \\ &= yw(z). \end{aligned}$$

pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x, y) = yw(z)$.

Partie II. Caractérisation des fonctions de production à élasticité de substitution constante.

5. (a) D'après le théorème sur la composée de fonction (cf cours) la fonction $t \mapsto \Psi(t, 1)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} v'(t) &= 1 \times \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, 1) + 0 \times \frac{\partial \Psi}{\partial y}(t, 1) \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, 1) \end{aligned}$$

D'après l'énoncé cette quantité est strictement positive.

La fonction v est de classe $\mathcal{C}^2$, strictement croissante $\mathbb{R}_+^*$.

(b) On a vu que $v'(t) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, 1)$. Or d'après l'énoncé, pour tout $y > 0$ fixé, $x \mapsto \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y)$ est strictement décroissante.

Donc v' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme en plus on vient de démontrer que v est deux fois dérivable, on en déduit v'' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Comme v' est une fonction décroissante à valeur positives sur $\mathbb{R}_+^*$, par produit $t \mapsto tv'(t)$ est une fonction décroissante à valeur positives sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc $t \mapsto -tv'(t)$ est une fonction croissante à valeur positives sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme de plus $t \mapsto v(t)$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme

φ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \mu$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\varphi(x) \geq \mu$.

Comme de plus $\mu \geq 0$, φ est à valeurs strictement positives.

De plus on a vu dans 5a que v' est à valeurs positives donc $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $\varphi(t) \leq v(t)$.

Donc comme v est croissante $\forall t \in [0, 1]$ $v(t) \leq v(1) = \Psi(1, 1) = 1$.

On a donc démontré que $\forall t \in [0, 1]$, $\varphi(t) \leq 1$, en passant à la limite avec $t \rightarrow 0$, $\mu \leq 1$.

(d) On a déjà fait le même raisonnement, il faut utiliser la propriété (homogénéité)

"pour tout réel $\lambda > 0$, la relation : $\Psi(\lambda x, \lambda y) = \lambda \Psi(x, y)$. "

6. (a) La fonction h est bien définie car φ est strictement positive.

Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$\Psi(x, y) = yv\left(\frac{x}{y}\right)$$

En dérivant par rapport à la variable x

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) = y \times \frac{1}{y} v'\left(\frac{x}{y}\right) = v'(z)$$

En dérivant par rapport à la deuxième variable

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = 1v\left(\frac{x}{y}\right) - y \times \frac{x}{y^2} v'\left(\frac{x}{y}\right) = v(z) - zv'(z) = \varphi(z)$$

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y)} = h(z).$

- (b) On sait que v' est à valeurs strictement positives (5a) et φ est à valeurs strictement positives (5b) donc

h est à valeurs strictement positives.

De plus comme v' est décroissante à valeurs positives et φ est croissante à valeurs positives, alors par quotient h est décroissante et donc h' est à valeurs négatives.

σ est à valeurs strictement positives.

7. Les fonctions σ et h sont celles qui ont été définies dans la question 6. On suppose que la fonction σ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$; on note σ_0 cette constante et on suppose $\sigma_0 \neq 1$. On pose : $r = 1 - \frac{1}{\sigma_0}$.

- (a) On a supposé que σ était constante

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad h(t) = -th'(t)\sigma_0 = \frac{1}{1-r}h'(t)$$

Comme h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ℓ l'est aussi par produit.

Soit $t > 0$

$$\begin{aligned} \ell'(t) &= (1-r)t^{-r}h(t) + t^{1-r}th'(t) \\ &= -(1-r)t^{-r}\frac{1}{1-r}h'(t) + t^{-r}h'(t) && \text{calcul précédent} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle ℓ est une fonction constante égale par exemple à $\ell(1) = h(1)1^{1-r} = h(1)$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $h(t) = h(1)t^{r-1}$

Remarque On pouvait démontrer que h vérifie l'équation différentielle $h'(t) = -\frac{1-r}{t}h(t)$ et résoudre cette équation.

(b) On pose pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $m(t) = \frac{(v(t))^r}{1+h(1)t^r}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned}
 m'(t) &= \frac{r v'(t) (v(t))^{r-1} (1+h(1)t^r) - (v(t))^r r h(1) t^{r-1}}{(1+h(t)t)^2} \\
 &= r (v(t))^{r-1} \frac{v'(t)(1+h(1)t^r) - v(t)h(1)t^{r-1}}{(1+h(t)t)^2} \\
 &= r (v(t))^{r-1} \frac{v'(t) + h(1)t^{r-1}(tv'(t) - v(t))}{(1+h(t)t)^2} \\
 &= r (v(t))^{r-1} \frac{v'(t) - h(1)t^{r-1}\varphi(t)}{(1+h(t)t)^2} \\
 &= r (v(t))^{r-1} \frac{v'(t) - h(t)\varphi(t)}{(1+h(t)t)^2} && \text{résultat précédent} \\
 &= r (v(t))^{r-1} \frac{v'(t) - v'(t)}{(1+h(t)t)^2} && \text{définition en 6a} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

La fonction m est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
 m(t) &= m(1) = \frac{v(1)^r}{1+h(1)} = \frac{\Psi(1,1)}{1+h(1)} && \text{définition de } v \text{ en 5a} \\
 &= \frac{1}{1+h(1)} && \text{hypothèses sur } \Psi \text{ en début de partie II}
 \end{aligned}$$

Donc par définition de m , $\frac{(v(t))^r}{1+h(1)t^r} = \frac{1}{1+h(1)}$.

Puis, $(v(t))^r = \frac{1+h(1)t^r}{1+h(1)}$, et comme les quantités sont positives :

Pour tout réel strictement positif t , $v(t) = \left(\frac{1+h(1)t^r}{1+h(1)} \right)^{\frac{1}{r}}$.

Remarque En partant de 5c et 6a on pouvait aussi montrer que v vérifie l'équation différentielle $v'(t) = \frac{1}{1+th(t)}v(t)$ puis résoudre cette équation.

(c) Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}
 \Psi(x, y) &= yv\left(\frac{x}{y}\right) && 5e \\
 &= y \left(\frac{1+h(1)\left(\frac{x}{y}\right)^r}{1+h(1)} \right)^{\frac{1}{r}} && \text{question précédente} \\
 &= \left(y^r \frac{1+h(1)\left(\frac{x}{y}\right)^r}{1+h(1)} \right)^{\frac{1}{r}} \\
 &= \left(\frac{h(1)}{1+h(1)}x^r + \frac{1}{1+h(1)}y^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
 &= \left(\frac{h(1)}{1+h(1)}x^r + \left(1 - \frac{h(1)}{1+h(1)}\right)y^r \right)^{\frac{1}{r}}
 \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser : $a = \frac{h(1)}{1+h(1)}$

- (d) On a prouvé dans cette partie que toutes les fonctions vérifiant les hypothèses indiquées en début de partie II sont nécessairement de la forme $(x, y) \mapsto (cx^\theta + (1 - c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}}$.