

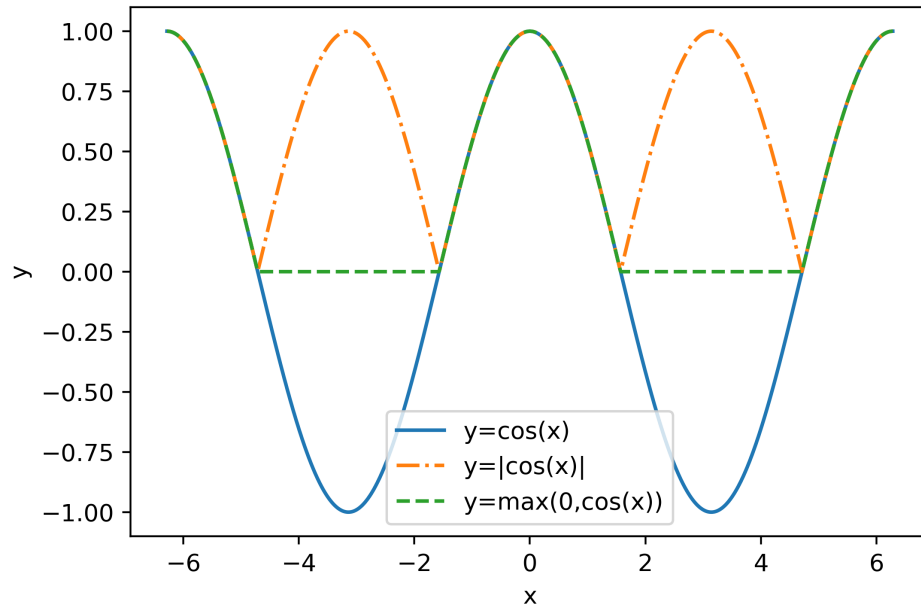
DM 02

D'après un sujet d'oral

Bio Spé

Réponses

1. On connaît le graphe de la fonction cosinus, qui nous sert de support pour tracer les deux autres graphes.



2. (a) L'équation homogène associée à (E_1) est $y' - \frac{1}{4}y = 0$.

L'ensemble des solutions de cette équation est $\left\{x \rightarrow Ke^{x/4}/K \in \mathbb{R}\right\}$.

Cherchons une solution particulière de l'équation (E_1) sous la forme $y_p : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$. On a

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E_1) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -a \sin(x) + b \cos(x) - \frac{1}{4}(a \cos(x) + b \sin(x)) = \cos(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \left(b - \frac{1}{4}a\right) \cos(x) + \left(-a - \frac{1}{4}b\right) \sin(x) = \cos(x) \end{aligned}$$

Il suffit de choisir a et b tels que $b - \frac{1}{4}a = 1$ et $-a - \frac{1}{4}b = 0$. Or

$$\begin{cases} b - \frac{1}{4}a = 1 \\ -a - \frac{1}{4}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{17} \\ b = \frac{16}{17} \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto -\frac{4}{17} \cos(x) + \frac{16}{17} \sin(x)$ est une solution particulière de (E_1) .

D'après le théorème de structure,

les solutions de (E_1) sont exactement les fonctions $x \mapsto Ke^{x/4} - \frac{4}{17} \cos(x) + \frac{16}{17} \sin(x)$ où $K \in \mathbb{R}$.

(b) f étant solution de (E_1) , il existe K tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ke^{x/4} - \frac{4}{17} \cos(x) + \frac{16}{17} \sin(x)$.

On a alors $f(0) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow K = \frac{4}{17}$. Donc

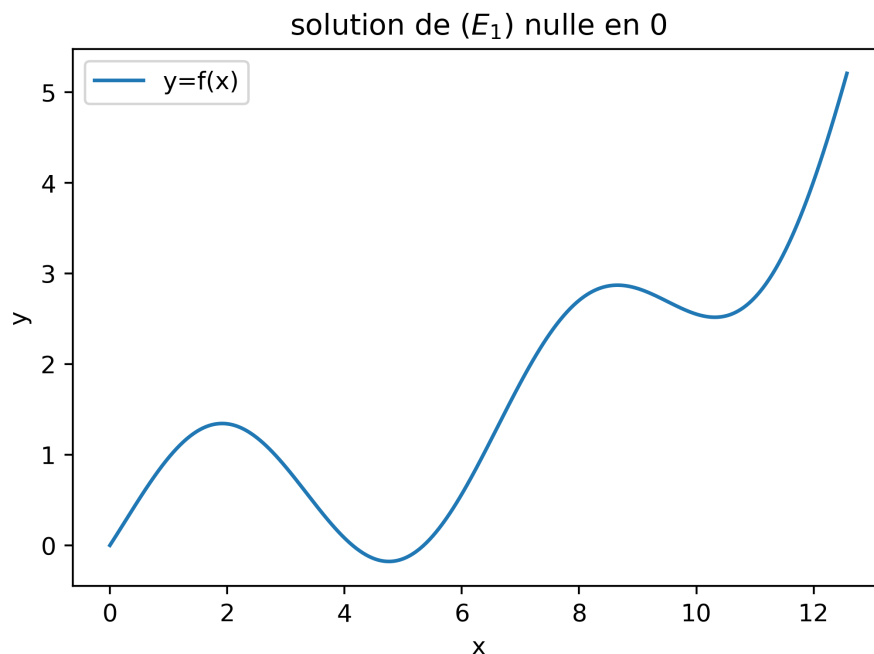
$$f : x \mapsto \frac{4}{17}e^{x/4} - \frac{4}{17} \cos(x) + \frac{16}{17} \sin(x).$$

(c) Pour créer la liste des abscisses permettant le tracé il existe au moins trois options possibles :

- `X=np.linspace(0,4*np.pi,1000)` : on précise ici le nombre de valeurs à prendre dans l'intervalle donné. X contient 1000 valeurs équiréparties entre 0 et 4π INCLUS.
- `X=np.arange(0,4*np.pi, 4*np.pi/1000)` : on précise ici le pas de la subdivision de l'intervalle donné. X contient tous les réels de la forme $0 + k \times \frac{4\pi}{1000}$ avec $k \in \llbracket 0; 999 \rrbracket$. 4π n'est donc pas inclus dans X .
- `X=[0+k*4*np.pi/1000 for k in range(1000)]` : on « fabrique » X à la main et ici X contient la même chose qu'avec la fonction `arange`.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return 4/17*np.exp(x/4)-4/17*np.cos (x) +16/17*np.sin (x)
X=np.linspace(0,4*np.pi,1000) # poly python oral
F=[f(x) for x in X]
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.plot(X,F,label='y=f(x)')
plt.legend()
plt.title("solution de $(E_1)$ nulle en 0")
plt.show()
```



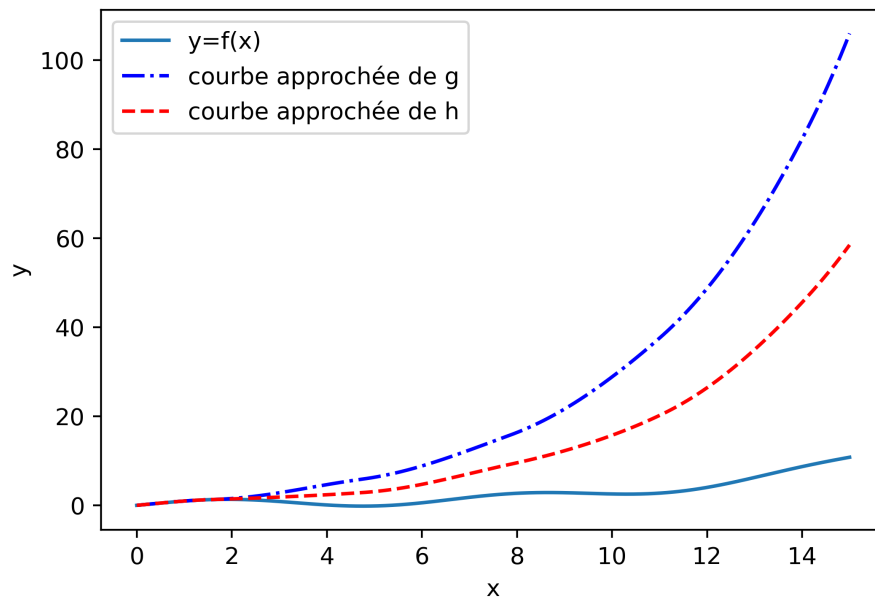
3. (a)

```
def euler(F,y0,a,b,N):
    """fonction qui applique la méthode d'euler"""
    Y=[y0]
    h=(b-a)/N
    for k in range(1,N+1):
        t=a+(k-1)*h
        y_courant=Y[k-1]
        y_suivant=y_courant + h*F(t,y_courant)
        Y.append(y_suivant)
    return Y
```

(b) On commence par créer les fonctions définissant les équations (E_2) et (E_3).

```
1 def E2(t,y):
2     return 1/4*y+abs(np.cos(t))
3 def E3(t,y):
4     return 1/4*y+max(0,np.cos(t))
5
6 N=1000
7 X=np.linspace(0,15,N+1)
8 F=[f(x) for x in X]
9 G=euler(E2,0,0,15,N)
10 H=euler(E3,0,0,15,N)
11 plt.plot(X,F,label='y=f(x)')
12 plt.plot(X,G,'b-.',label='courbe approchée de g')
13 plt.plot(X,H,'r--',label='courbe approchée de h')
14 plt.xlabel("x")
15 plt.ylabel("y")
16 plt.legend()
17 plt.show()
```

On obtient :



4. Soit φ la ¹ solution de

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{4}y = & u(x) \\ y(0) & = 0 \end{cases} \quad (C_4)$$

Posons ², pour $x \in \mathbb{R}^+$, $K(x) = \frac{\varphi(x)}{e^{x/4}}$, c'est-à-dire $\varphi(x) = K(x)e^{x/4}$, alors :

$$\begin{aligned} \varphi \text{ est solution de } (C_4) \text{ sur } \mathbb{R}^+ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^* & K'(x)e^{x/4} + K(x)\frac{1}{4}e^{x/4} - K(x)e^{x/4} = u(x) \\ K(0)e^0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^+ & K'(x) = u(x)e^{-x/4} \\ K(0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui démontre que K est la primitive de $x \mapsto u(x)e^{-x/4}$ qui s'annule en 0.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi : & x & \mapsto e^{x/4} \int_0^x u(t)e^{-t/4} dt \end{array}}$$

Comme u est continue et à valeurs positives et que x est positif (les bornes de l'intégrale sont dans "le bon sens"), en utilisant la positivité de l'intégrale :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) \geq 0.}$$

5. On constate que $h - f$ est l'unique solution de

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{4}y = & \max(0, \cos(x)) - \cos(x) \\ y(0) & = 0 \end{cases}$$

On constate aussi que $x \mapsto \max(0, \cos(x)) - \cos(x)$ est continue et à valeurs positives sur $\mathbb{R}_+$, on peut donc appliquer la question précédente et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad h(x) - f(x) \geq 0$$

De même on constate que $g - h$ est solution de

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{4}y = & |\cos(x)| - \max(0, \cos(x)) \\ y(0) & = 0 \end{cases}$$

On constate aussi que $x \mapsto |\cos(x)| - \max(0, \cos(x))$ est continue et à valeurs positives sur $\mathbb{R}_+$, on peut donc appliquer la question précédente et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) - h(x) \geq 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq h(x) \leq g(x).}$$

6. Pour x réel, $|\sin(x)| \leq 1$ et $|\cos(x)| \leq 1$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) \geq \frac{4}{17}e^{x/4} - \frac{4}{17} - \frac{16}{17}$$

or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{17}e^{x/4} - \frac{4}{17} - \frac{16}{17} = +\infty$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure

-
1. Comme nous étudions un problème de Cauchy on pourrait démontrer l'existence et l'unicité d'une telle solution
 2. c'est toujours possible car une exponentielle est toujours strictement positive et K est bien dérivable

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} g = \lim_{+\infty} h = +\infty.$$