

DL mathématiques n°03
Pour le lundi 05 octobre 2026

Exercice

Soit u la suite définie par

$$u_0 \in]0; 1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que pour tout entier n on a $u_n \in]0; 1[$.
2. Montrer que la suite u est décroissante et étudier sa limite.
3. Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente et calculer sa somme.
4. En calculant les sommes partielles, montrer que la série $\sum \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ est divergente.
5. Trouver un équivalent de $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ et en déduire que la nature de la série $\sum u_n$.

Facultatif

1. On s'intéresse dans cette question aux fonctions $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et telles que

$$\begin{cases} g'(t) \geq g(t) & \text{pour tout } t > 0 \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

- (a) Donner un exemple de fonction g non identiquement nulle vérifiant ces conditions.
 - (b) Montrer que si g vérifie ces conditions, alors g est une fonction positive ou nulle. Indication : on pourra s'intéresser à la fonction $w(t) = g(t)e^{-t}$.
 - (c) Montrer que si on est de plus dans le cas d'égalité (i.e., $g'(t) = g(t)$ pour tout $t > 0$) alors g est la fonction identiquement nulle.
2. On s'intéresse maintenant aux fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et telles que

$$\begin{cases} f'(t) = t^2 + f(t) & \text{pour tout } t > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

- (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_0(t) = e^t \int_0^t x^2 e^{-x} dx$. Montrer que f_0 est une fonction qui vérifie les conditions ci-dessus.
 - (b) Montrer que f_0 est la seule fonction qui vérifie les conditions ci-dessus.

3. On s'intéresse maintenant à une fonction $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et telle que

$$\begin{cases} h'(t) = t^2 + h(t)^2 + h(t) & \text{pour tout } t > 0, \\ h(0) = 0. \end{cases}$$

On veut montrer qu'il n'existe pas une telle fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ tout entier. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde. Supposons qu'une telle fonction h existe.

- (a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $h(t) \geq f_0(t)$. En déduire que $h(t) > 0$ quand $t > 0$.
 - (b) Soit $u > 0$ un réel fixé. Montrer que pour tout $t > u$,

$$h(t) \geq \frac{h(u)}{1 - (t - u)h(u)}.$$

Indication : on pourra montrer que $\frac{h'(x)}{h(x)^2} \geq 1$.

- (c) Montrer que, quand t est assez grand, $h(t)$ ne peut pas être défini et conclure.