

Extrait d'une planche d'oral Agro-véto

1. On considère la fonction f définie sur $[0; 9]$ par :

$$\forall x \in [0; 9], \quad f(x) = \frac{10x(x-1)}{90 - x^2 + x}.$$

Écrire une fonction Python **f** qui prend en entrée une liste **L** de réels de $[0; 9]$ et qui renvoie la liste des images par f de ces réels.

On dispose de deux urnes. L'urne U_1 contient 10 tickets dont x ($x \in \llbracket 2; 9 \rrbracket$) portent la lettre « G ». L'urne U_2 contient 10 tickets dont y ($y \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$) portent la lettre « G ».

Le jeu se déroule de la manière suivante :

- Au premier tour Eric pioche simultanément deux tickets dans l'urne U_1 . S'il tire deux tickets « G », il gagne et le jeu s'arrête.
- Si Eric perd au premier tour, c'est au tour d'Otis. Il tire un ticket dans l'urne U_2 . S'il tire un « G », il gagne et le jeu s'arrête. Sinon c'est au tour d'Eric.
- Après chaque tour les tickets sont remis dans les urnes.

On introduit les événements suivant (k désigne un entier naturel non nul) :

- A_k : « le k -ième tirage d'Eric a lieu et Eric obtient deux tickets G » ;
- B_k : « le k -ième tirage d'Otis a lieu et Otis obtient un ticket G » ;
- E_k : « Eric gagne à son k -ième tirage » ;
- O_k : « Otis gagne à son k -ième tirage » ;
- E : « Eric gagne la partie »
- O : « Otis gagne la partie »

2. Déterminer la probabilité p qu'Eric gagne à son premier tour et la probabilité p' qu'Otis gagne à son premier tour sachant qu'Eric ne vient pas de gagner.

3. (a) Exprimer l'événement E_k à l'aide de certains des événements A_i et B_j . En déduire la valeur de $P(E_k)$.

- (b) Exprimer l'événement E à l'aide des événements E_k .

Montrer alors que $P(E) = \frac{p}{1 - qq'}$ où $q = 1 - p$ et $q' = 1 - p'$.

- (c) Montrer que $P(O) = \frac{p'q}{1 - qq'}$.

4. Montrer que le jeu est équitable si, et seulement si, $y = f(x)$.

5. Utiliser la fonction Python de la question 1. pour déterminer le ou les couple(s) (x, y) tels que le jeu soit équitable.

Facultatif : propriétés des espaces probabilisés

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

1. Continuité monotone

- (a) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événement croissante, c'est à dire telle que pour tout n entier naturel $A_n \subset A_{n+1}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = A_n \setminus A_{n-1}$ et $\Delta_0 = A_0$. Montrer que ces événements sont incompatibles deux à deux et que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \Delta_n$.

- (b) En déduire que :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

- (c) Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements, en utilisant le résultat précédent démontrer que :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{k=0}^n B_k \right)$$

On admet que l'on pourrait aussi démontrer que :

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=0}^n B_k \right)$$

et que si $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} C_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n)$$

2. Sous additivité

- (a) Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements. Montrer que pour tout entier naturel n

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{k=0}^n B_k \right) \leq \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(B_k)$$

- (b) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k \right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$$

La série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(B_n)$ peut diverger vers $+\infty$, et dans ce cas là l'inégalité est considérée comme juste.

3. Premier lemme de Borel Cantelli

On suppose dans cette question que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(B_n)$ converge.

On s'intéresse à l'événement $L = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} B_k$

(a) Interpréter en une phrase « L est réalisé ».

(b) On pose, pour n entier naturel $C_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} B_k$, montrer que $0 \leq$

$$\mathbb{P}(C_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k).$$

(c) En utilisant les questions précédentes montrer que $\mathbb{P}(L) = 0$.

4. Deuxième lemme de Borel Cantelli

On suppose dans cette question que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements **indépendants** telle que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(B_n)$ diverge. On s'intéresse à

l'événement $L = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} B_k$ et on pose pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(B_n)$. On suppose de plus que pour tout entier naturel n , $p_n < 1$.

(a) Montrer que pour tout entiers naturels n et m tels que $m > n$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^m B_k\right) = 1 - \prod_{k=n}^m (1 - p_k).$$

(b) Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \ln(1 - p_n)$ est divergente.

(c) En déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} B_k\right) = 1$

(d) En déduire que $\mathbb{P}(L) = 1$.