DM1

Réponses

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, ainsi que la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante :

$$I_0 = \frac{\pi}{4} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^{\pi/4} \left[f(x)\right]^n \, \mathrm{d}x$$

Étude de la bijection réciproque de f.

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.

RÉPONSE:

On remarque que pour $x \in I$, $\cos(x) > 0$, donc la fonction f est définie et continue comme quotient défini d'une fonction continue.De plus la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est strictement décroissante sur I, donc f est strictement croissante. D'après le théorème de la bijection monotone f réalise une bijection de I dans $f(I) = \left[f(0); f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[1; \sqrt{2}\right]$

*

2. Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

RÉPONSE:

Pour x au voisinage de 0

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\cos(x)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\ &= 1 - \left(-\frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) \qquad \text{car } \frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3).}$$

*

3. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.

RÉPONSE:

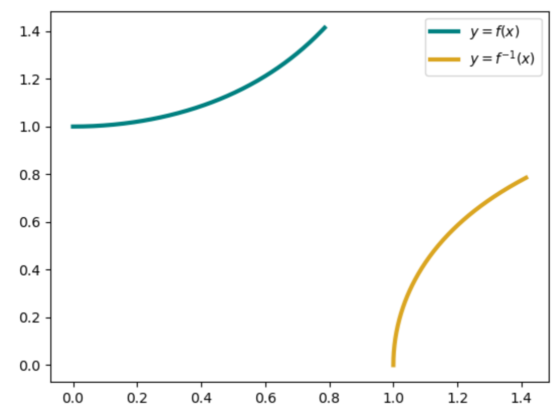
On obtient le graphe représentatif de f^{-1} à l'aide d'une symétrie d'axe $y = x$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return 1/np.cos(x)

x =np.linspace(0,np.pi/4,200)
y=f(x)
plt.plot(x,y,color="teal", linewidth=3,label="y=f(x)")

plt.plot(y,x,color="goldenrod", linewidth=3,label="y=f^{-1}(x)")
#symétrie
plt.show()
```



*

4. Justifier que :

$$\forall x \in J, \quad \begin{cases} \cos\left(f^{-1}(x)\right) & = \dfrac{1}{x} \\ \sin\left(f^{-1}(x)\right) & = \sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} \end{cases}$$

RÉPONSE:

Par définition d'une bijection réciproque, pour $x \in J$

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

donc

$$\frac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)} = x$$

ce qui démontre, comme x est non nul,

$$\boxed{\text{Pour } x \in J,\ \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x}.}$$

De plus pour tout réel u

$$(cos(u))^2 + (\sin(u))^2 = 1$$

donc

$$\cos\left(f^{-1}(x)\right) + \sin\left(f^{-1}(x)\right) = 1$$

Ce qui donne, en utilisant le résultat précédent

$$\sin\left(f^{-1}(x)\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

de plus f^{-1} est à valeurs dans $I \subset [0;\pi]$ donc $\sin\left(f^{-1}(x)\right)$ est positif.

$$\boxed{\text{Pour } x \in J,\ \sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}.}$$

*

5. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

RÉPONSE:

Rappel

BCSPT1 Soit f une fonction **dérivable et bijective** de l'intervalle I dans l'intervalle J et telle que pour tout $y \in J$ on a $f'\left(f^{-1}(y)\right) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable et

$$\forall y \in J \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

La fonction f est dérivable sur I comme quotient défini d'une fonction dérivable et

$$\forall x \in I \qquad f'(x) = \frac{\sin x}{(\cos(x))^2}$$

Or $f'(0) = 0$, on ne peut pas donc appliquer le théorème de première année sur l'intervalle J. Mais f induit une bijection de $I\setminus\{0\}$ dans $J\setminus\{f(0)\} = J\setminus\{1\}$ et sur cet intervalle f' ne s'annule pas. Pour $y \in \setminus\{1\}$

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(y) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \\
&= \frac{\left(\cos\left(f^{-1}(y)\right)\right)^2}{\sin\left(f^{-1}(y)\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{y^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}} && \text{question précédente} \\
&= \frac{1}{y^2\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}} \\
&= \frac{1}{y^2\sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}} \\
&= \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}} && \text{car } y \text{ est positif}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } J\setminus\{1\} \text{ et pour } x \in J\setminus\{1\}, \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

*

6. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

RÉPONSE:

Remarque : Contrairement au premier calcul de DL, ici l'énoncé suggère d'utiliser la formule

Rappel

BCPST1 Si g est dérivable en un point a à l'intérieur de l'intervalle de définition de g alors au voisinage de a $g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a)$

En utilisant la question précédente $(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour $x \in I$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\sqrt{2}) = x &\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} && \text{car } x \in I \end{aligned}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) \underset{x \to \sqrt{2}}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\sqrt{2}) + o\left(x-\sqrt{2}\right)}$$

*

Étude des dérivées successives de f.

7. Justifier que f est de classe C^∞ sur I, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I.

RÉPONSE:

$x \mapsto \cos x$ est une fonction de classe C^∞ sur I et qui ne s'annule pas

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I}$$

*

8. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe une fonction polynomiale P_n tel que :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$$

RÉPONSE:

Remarque : Question à la rédaction délicate, il faut bien expliciter la propriété à démontrer, en faisant attention aux quantificateurs.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$\mathscr{H}_n$: il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$

- **Initialisation** On a calculer que pour $x\imath I$, $f'(x) = \dfrac{\sin x}{(\cos x)^2}$, il suffit donc de poser P_1 $x \mapsto x$ pour obtenir

$$\forall x \in I \qquad f^{(1)}(x) = \frac{P_1(\sin x)}{\cos^{1+1}(x)}$$

- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons avoir démontré que $\mathscr{H}_n$ est vraie, c'est à dire qu'il existe une fonction polynomiale P_n telle que pour tout réel x de I on ai $f^{(n)} = \dfrac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$ On a alors pour x dans I

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= \frac{\cos^{n+1}(x) \cdot \cos(x) P_n'(\sin x) + (n+1)\sin(x)\cos^n(x) P_n(\sin x)}{\left(\cos^{n+1}(x)\right)^2} \end{aligned}$$

HR et formules de dérivation

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos^n(x)\left(\cos^2(x)P'_n(\sin x) + (n+1)\sin(x)P_n(\sin x)\right)}{\cos^{2n+2}(x)} \\
&= \frac{(1-\sin(x))(x)P'_n(\sin x) + (n+1)\sin(x)P_n(\sin x)}{\cos^{n+2}(x)} \\
&= \frac{P_{n+1}(\sin x)}{\cos^{n+1+1}(x)}
\end{aligned}$$

En **posant** $P_{n+1}\ : x \mapsto (1-x^2)P'_n(x) + (n+1)xP_n(x)$ qui est bien une fonction polynomiale d'après les théorèmes sur les opérations sur les fonctions polynomiales.

On a bien démontrer l'existence d'une fonction polynomiale qui permet de vérifier $\mathscr{H}_{n+1}$

- **conclusion** D'après le principe de récurrence

Pour tout entier naturel n non nul, il existe une fonction polynomiale P_n tel que :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}}$$

*

9. Déterminer les fonction polynomiales P_1 et P_2.

RÉPONSE:

On a déjà déterminé que $P_1\ : x \mapsto x$ On sait aussi en utilisant la formule trouvé dans la démonstration de l'hérédité que, pour x réel $P_2(x) = x \mapsto (1-x^2)P'_1(x) + (1+1)xP_1(x) = 1+x^2$

$$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel, } P_1(x) = x \text{ et } P_2(x) = 1+x^2}$$

*

10. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I \quad P_{n+1}(x) = (1-x^2)P'_n(x) + (n+1)x.P_n(x)$$

En déduire le polynôme P_3.

RÉPONSE:

On a démontré que cette formule est vraie dans la récurrence. On peut **mais ce n'est pas attendu** vérifier que poour tout n entier naturels non nuls P_n est unique et donc forcément défini par cette relation. Supposons que pour un entier n naturel non nul donné , il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que pour tout x dans I

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)} = f^{(n)}(x) = \frac{Q_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$$

alors pour tout x dans I $P_n(\sin(x)) = Q_n(\sin(x))$ Comme $\sin(x)$ prend une infinité de valeurs différentes sur I, le polynôme $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines et est donc nul.

Pour x réel

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= (1-x^2)P'_2(x) + 3xP_2(x) \\
&= (1-x^2)\cdot 2x + 3x(1+x^2) \\
&= 5x + x^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel } P_3(x) = 5x + x^3.}$$

*

11. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

RÉPONSE:

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1 (on dit qu'il est *unitaire*).

- **initialisation** vraie car $P-1(x) = x$.

- Soit n entier naturel non nul, supposons que P_n soit un polynôme unitaire de degré n, alors on peut écrire

$$P_n(x) = x^n + R_n(x)$$

où R_n est un polynôme de degré au plus $n-1$
Pour x réel

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (1-x^2)P_n'(x) + (n+1)xP_n(x) \\ &= (1-x^2)\left(nx^{n-1} + R_n'(x)\right) + (n+1)x(x^n + R_n(x)) \\ &= x^{n+1} + nx^{n-1} + (1-x^2)R_n'(x) + (n+1)xR_n(x) \end{aligned}$$

Et la fonction polynomiale $nx^{n-1} + (1-x^2)R_n'(x) + (n+1)xR_n(x)$ est de degré au plus n. P_{n+1} est donc de degré $n+1$ et de coefficient dominant 1.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ , } P_n \text{ soit un polynôme unitaire de degré } n}$$

*

Étude de la suite d'intégrales.

12. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer I_2.

RÉPONSE:

On a déjà vu que la fonction f est définie et continue sur l'intervalle (fermé) $[0; \frac{\pi}{4}]$, il en est de même pour f^n pour tout entier naturel non nul [1].

$$\boxed{\text{La suite d'intégrale } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bien définie.}}$$

*

1. Le résultat reste vraie pour $n = 0$

13. Déterminer les réels a et b, tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,\ 1\},\quad \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$$

RÉPONSE:

Remarque : Classique, méthode à retenir et à savoir faire même sans indication ! Pour $t \in]-1;1[$

$$\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} = \frac{a(1+t)+b(1-t)}{(1-t)(1+t)} = \frac{(a+b)+t(a-b)}{1-t^2}$$

Les deux quantités $\frac{1}{1-t^2}, \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$ sont égales si et seulement si leur numérateurs snt des fonctions polynomiales identiques, et donc par identification des coefficients

$$\begin{cases} a+b &= 1 \\ a-b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ b &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Les (seuls) réels qui conviennent sont } a = b = \frac{1}{2}.}$$

*

14. En posant $t = \sin x$, déterminer I_1.

RÉPONSE:

La fonction $t \mapsto \sin t$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ dont la dérivée $t \mapsto cos x$ ne s'annule pas.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u && \text{changement de variable} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}2} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t && \text{question précédente et } \sqrt{2}/2 < 1 \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(|1+t|) - \ln(|1-t|)\right]_0^{\sqrt{2}/2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\sqrt{2}/2\right) - \ln\left(1-\sqrt{2}/2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

*

15. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

RÉPONSE:

Pour tout t dans $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ $\cos(t) \in \,]0;1[$, donc

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \qquad \frac{1}{\cos t} > 1$$

donc pour n entier naturel non nul

$$(f(t))^{n+1} \geqslant (f(t))^n$$

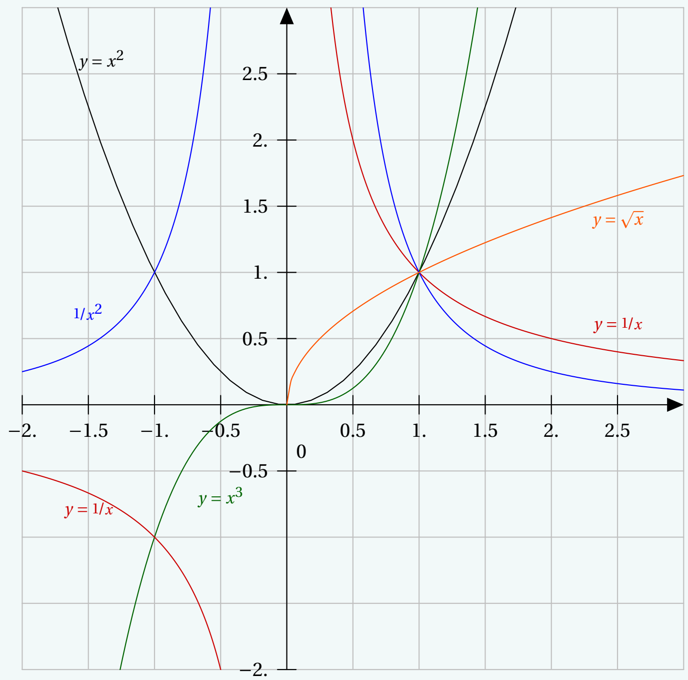
Les bornes des intégrales étant dans l'ordre croissant, on peut appliquer le théorème de la croissance de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/4} (f(t))^{n+1}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\pi/4} (f(t))^n\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

Rappel

Basique Il faut connaître et savoir utiliser les résultats sur les positions relatives des graphes des fonctions puissances, que l'on peut retenir sous la forme d'un schéma simplifié.



Les points importants sont l'allure des courbes, les points de croisements, les positions relatives des courbes, et être capables de généraliser à d'autres puissances.

*

16. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \quad I_n \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n^2}\frac{1}{\cos^n\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n^2}\right)}$$

En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, la fonction intégrée étant positive et comme

$$0 \leqslant \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{\pi}{4}$$

on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} (f(x))^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} (f(x))^n \,\mathrm{d}x$$

De plus la fonction $t \mapsto (f(x))^n$ est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ donc

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}; \frac{\pi}{4}\right] \qquad (f(x))^n \geqslant \left(f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)\right)^n$$

En intégrant on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n x} \,\mathrm{d}x \geqslant \left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)\right] \frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \quad I_n \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n x} \,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}}$$

Soit n un entier naturel plus grand que 2, en utilisant la décroissance de la fonction cosinus sur $[0;\pi]$

$$0 \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2^2}\right) \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$0 \leqslant \frac{1}{\left(\cos\left(\frac{\pi-1}{4}\right)\right)^n} \leqslant \frac{1}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)\right)^n}$$

puis

$$0 \leqslant \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi-1}{4}\right)}\right)^n \leqslant \frac{1}{n^2} \frac{1}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)\right)^n}$$

Comme $\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi-1}{4}\right)} > 1$ et en utilisant le théorème des croissances comparées

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$$

En utilisant le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \infty}$$

*

17. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n.$

RÉPONSE:

Remarque : méthode classique, les calculs sont assez techniques ici, mais rien d'anormal pour une question finale.
Soit n un entier naturel,

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^{n+2}(x)} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} u(x)v'(x) \,\mathrm{d}x$$

en posant pour x dans $[0;\pi]4$

$$u(x) = \frac{1}{\cos^n x} = \cos^{-n}(x) \qquad u'(x) = n\sin(x)\cos^{-n-1}(x) = n\frac{\sin(x)}{\cos^{n+1}(x)}$$
$$v(x) = \tan x \qquad v'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathscr{C}^1$ on peut utiliser le théorème d'intégration par parties.

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/4} u(x)v'(x) \,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)] - \int_0^{\pi/4} u'(x)v(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{\tan x}{\cos^n x}\right]_0^{\pi/4} - n\int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x)\sin(x)}{\cos^{n+1}(x)} \,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^n - n\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} \,\mathrm{d}x && \text{définition de } \tan(x) \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^n - n\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} \,\mathrm{d}x && \text{formule } \cos^2(x)+\sin^2(x) = 1 \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^n - n\left(I_{n+2} - I_n\right)
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$I_{n+2} + nI_{n+2} = \left(\sqrt{2}\right)^n + nI_n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n}$$

*