DM 07

BCPST Spé 2

à rendre le mercredi 22 novembre

Obligatoire

Un jeu vidéo comporte N phases de jeu : niveau 1, niveau 2, ... niveau N. On suppose que N est un entier au moins égal 3. Le jeu commence au niveau 1. Ensuite, il faut réussir un niveau pour passer au suivant et ainsi de suite jusqu'au dernier niveau.

Le jeu s'arrête si l'on a échoue à l'un des niveaux ou si l'on a réussi tous les niveaux.

On suppose en outre que, lorsqu'on parvient au niveau k ($k = 1, 2, ..., N$), la probabilité de réussir ce $kème$ niveau est égale $1/k$.

On désigne par X_N la variable aléatoire suivante :

"Nombre de niveaux entièrement franchis au moment où le jeu s'arrête".

Ainsi, pour $k = 1, 2, ..., N-1$, l'événement $(X_N = k)$ signifie que l'on a échoué au niveau $k+1$, et l'événement $(X_N = N)$ que l'on est vainqueur du jeu.

1. Démontrer que : $P(X_N = k) = \dfrac{k}{(k+1)!}$ pour $k = 1, 2, ... N-1$ et que : $P(X_N = N) = \dfrac{1}{N!}$
2. Calculer $E(X_N + 1)$. En déduire que $E(X_N) = S_N - 1$ avec
$$S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$
Que vaut $\lim\limits_{N\to+\infty} E(X_N)$?
3. Exprimer $E[(X_N+1)(X_N-1)]$ l'aide de S_{N-3}
En déduire $V(X_N)$ en fonction de S_N, S_{N-3} et N.
Montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} V(X_N) = 3e - e^2$.
4. Compléter la fonction suivante pour quelle simule cette expérience

```
import numpy.random as rd
def jeux(N)
        nf=???????
        while (rand()<1/(nf+1)) and  (?????????) :
                nf=
    return ?????
```

5. On fixe $N = 10^7$. En utilisant la fonction précédente écrire un programme qui calcule une moyenne du nombre de niveaux franchis.

Facultatif

On étudie une méthode de détection des porteurs d'un parasite au sein d'un ensemble donné de N individus tirés au sort. La probabilité d'être porteur du parasite dans la population est p avec $0 < p < 1$. Les personnes sont atteintes indépendamment les unes des autres.

On dispose d'un test permettant d'établir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le parasite, le résultat de ce test étant dit positif dans le premier cas et négatif dans le second.

Pour chacun des N individus, on possède un prélèvement sanguin. On envisage alors deux méthodes de détection.

- Première méthode : on teste un à un les N prélèvements, effectuant ainsi N tests.
- Seconde méthode (poolage) :
  - On fixe un entier naturel non nul l. On suppose que N est un multiple de l et on pose $N = n.l$. On répartit les N prélèvements en n groupes $G_1, G_2, \ldots, G_n$, chaque groupe $G_i$contenant l prélèvements. Pour chacun des groupes G_i, on extrait une quantité de sang de chacun des l prélèvements qu'il contient, puis on mélange ces extraits, obtenant ainsi un échantillon de sang H_i, caractéristique du groupe G_i.
  - On teste alors H_i

    - si le test de $H_i$est négatif, aucun des individus au sein du groupe G_i n'est porteur du parasite. Le travail sur le groupe G_i est alors terminé ;

    - si le test de $H_i$est positif, on teste un à un les prélèvements de G_i pour détecter les porteurs du parasite au sein du groupe G_i.

Soient X la variable aléatoire égale au nombre de groupes G_i pour lesquels le test de H_i a été positif et T la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués dans la réalisation de la méthode du poolage.

1. Exprimer T à l'aide de n, l et X.
2. Pour tout nombre entier naturel i compris entre 1 et n, calculer la probabilité de l'événement : "le test de $H_i$est négatif"
3. Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de X.
4. Déterminer enfin l'espérance de T et préciser sous quelles conditions cette seconde méthode est la plus avantageuse.