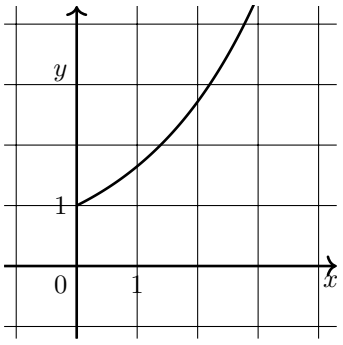
DL mathématiques n°05
Réponses

1 Modélisation de la dynamique d'une population isolée

1. (a) L'équation (1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants dont l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{rt}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
   Avec la condition initiale $x(0) = x_0$, on en déduit que la fonction x est la fonction $x : t \mapsto x_0\mathrm{e}^{rt}$.

   (b)



   (c) La fonction x est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Cela voudrait dire que la population croit au cours du temps sans s'arrêter. Cela ne semble pas raisonnable.

2. (a) Pour x petit, $rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ est proche de rx et donc les solutions de (2) sont proches des fonctions de la question 1.

   (b)

x	0		K		$+\infty$
rx		$+$		$+$	
$1 - \dfrac{x}{K}$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$		$+$	0	$-$	

   (c) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe t_0 tel que $x(t_0) = 0$.
   On pose alors $t_1 = \inf\{t > 0 \ / \ x(t) = 0\}$ (*cette borne inférieure existe bien car* $\{t > 0 \ / \ x(t) = 0\}$ *est un ensemble de* $\mathbb{R}$ *non vide et minoré*).

La fonction x étant continue sur $\mathbb{R}^+$, on a donc $x(t_1) = 0$. Comme $x(0) > 0$, on peut donc en déduire que $t_1 \neq 0$.

On peut aussi remarquer que pour tout $t \in [0; t_1[$, $x(t) > 0$. En effet, s'il existait $\alpha \in [0; t_1[$ tel que $x(\alpha) \leqslant 0$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (x est bien continue), il existerait $\beta \in]0; \alpha]$ (donc $\beta < t_1$) tel que $x(\beta) = 0$. Ceci est absurde par définition de t_1.

Enfin, x étant continue en t_1, il existe un voisinage de t_1 sur lequel $x(t) < K$.

On a donc un intervalle de la forme $[\eta; t_1]$ sur lequel $x(t) \in [0; K[$. D'après la question précédente, la fonction x est donc croissante sur cet intervalle. Mais comme $x(t_1) = 0$ on devrait pouvoir en déduire que $x(t) \leqslant 0$ ce qui est en contradiction avec ce qu'on a montré plus haut.

En conclusion, il n'existe pas de $t > 0$ tel que $x(t) = 0$.

Une autre méthode, plus courte, utilise un théorème hors programme : le théorème de Cauchy-Lipschitz. Ce théorème permet d'affirmer qu'une équation différentielle, sous de bonnes hypothèses, munie d'une condition initiale, admet une unique solution.

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe t_0 tel que $x(t_0) = 0$. Alors la fonction x et la fonction nulle sont toutes les deux solutions sur $[0; +\infty[$ du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = ry\left(1 - \dfrac{y}{K}\right) \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

Ce problème de Cauchy admettant une unique solution (on admet que les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont réunies), on en déduit que x est égale à la fonction nulle. Ceci est absurde car $x(0) = x_0 > 0$.

(d) x étant dérivable et ne s'annulant pas, on peut affirmer que z est dérivable. De plus :

$$z'(t) = -\frac{x'(t)}{x(t)^2} = -r\frac{1}{x(t)}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) = -rz(t) + \frac{r}{K}.$$

(e) Les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $z' = -rz$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{-rt}$.

Une solution particulière de l'équation $z' = \dfrac{r}{K} - rz$ est la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{K}$.

D'après le théorème de structure, les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{-rt} + \dfrac{1}{K}$.

Avec la condition initiale $z(0) = z_0$, on en déduit que :

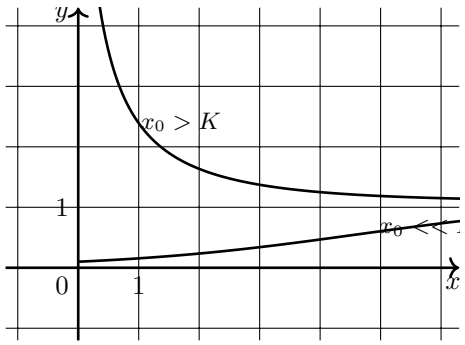
$$\forall t \geqslant 0, \qquad z(t) = \left(z_0 - \frac{1}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt} + \frac{1}{K}.$$

(f) Comme $x(t) = \dfrac{1}{z(t)}$ et $x_0 = \dfrac{1}{z_0}$, on obtient :

$$\forall t \geqslant 0, x(t) = \frac{x_0 K}{(K - x_0)\mathrm{e}^{-rt} + x_0}.$$

(g) r étant strictement positif, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-rt} = 0$ et donc, par opération sur les limites, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = K$.

(h)



(i) La constante K peut être vue comme la capacité d'acceuil de l'environnement. Si la population dépasse cette limite elle diminue, si elle est en dessous elle augmente, pour tendre vers cette capacité.

2 Modèle proie-prédateur

On pourra remarquer dans cette partie qu'il faut que toutes nos constantes (r, p, m, q...) soient strictement positives pour éviter les discussions sans fin...

3. (a) Si on suppose que $y(t) = 0$, pour tout t alors le système (3) devient $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx$, c'est-à-dire qu'on se retrouve dans la situation du début de la partie 1.
La population de lièvre croit alors sans majoration.

   (b) Si $x(t) = 0$ pour tout t alors le système (3) devient $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -my$, ce qui nous donne $y(t) = y_0\mathrm{e}^{-mt}$ et donc la fonction y est décroissante et temps vers 0.
La population de lynx décroit donc et tend à disparaitre.

4. Pour tout $s \geqslant 0$, on peut donc écrire :

$$\bar{x}(s) = \frac{q}{r}x\left(\frac{s}{r}\right) \qquad \text{et} \qquad \bar{y}(s) = \frac{p}{r}y\left(\frac{s}{r}\right).$$

Les fonctions $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont donc dérivables sur $\mathbb{R}^+$ car les fonctions x et y le sont aussi sur $\mathbb{R}^+$.
Et on a, pour tout $s \geqslant 0$, $\dfrac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}s}(s) = \dfrac{q}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{s}{r}\right)$ et $\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}s}(s) = \dfrac{p}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{s}{r}\right)$.

Ainsi :

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{s}{r}\right) = rx\left(\dfrac{s}{r}\right) - px\left(\dfrac{s}{r}\right) y\left(\dfrac{s}{r}\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{s}{r}\right) = -my\left(\dfrac{s}{r}\right) + qx\left(\dfrac{s}{r}\right) y\left(\dfrac{s}{r}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}s}(s) = \bar{x}(s) - \bar{x}(s)\bar{y}(s) \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}s}(s) = -\dfrac{m}{r}\bar{y}(s) + \bar{x}(s)\bar{y}(s) \end{cases}$$

5. (a) On a :

$$\begin{cases} x - xy = 0 \\ -ay + xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \text{ car } a \neq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = a \end{cases}$$

Les points d'équilibre du système (5) sont donc les couples $(0,0)$ et $(a,1)$.

(b) Le point $(0,0)$ correspond au cas de deux populations nulles donc inexistantes.
Le point d'équilibre $(a,1)$ correspond, si on revient aux « vraies » fonctions x et y et si on se souvient que $a = \dfrac{m}{r}$, à la situation où

$$x(t) = \frac{m}{q} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{r}{p}.$$

Ce point représente un état d'équilibre de coexistence entre les proies et les prédateurs. Biologiquement cela correspond à un équilibre entre les taux de reproduction et de mortalité (*pas du tout convaincue de cette interprétation...*).

(c) Point $(0,0)$: sans proies ni prédateurs, les deux populations restent nulles.
Point $(a,1)$: le nombre de proies fournit une quantité de nourriture exactement suffisante pour maintenir la population de prédateurs constante (taux de mortalité et natalité parfaitement à l'équilibre). De plus, le taux de reproduction des proies compense parfaitement les pertes dues aux prédateurs.

6. (a) La fonction f_c est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f_c'(u) = 1 - \dfrac{c}{u}$. La fonction f_c est donc décroissante sur $]0;c]$ et croissante sur $[c;+\infty[$. f_c étant continue sur $]0;+\infty[$, elle admet donc un minimum en $u = c$ et donc

$$\forall u > 0, \qquad f_c(u) \geqslant f_c(c) = c(1 - \ln(c)).$$

(b) On peut préciser notre raisonnement précédent en remarquant que la fonction f_c est strictement décroissante sur $]0;c]$ et strictement croissante sur $[c;+\infty[$.
Donc, pour $u > 0$ et $u \neq c$, on a $f_c(u) > f_c(c)$ et donc $f_c(u) \neq c(1 - \ln(c))$.
Cela montre donc que $f_c(u) = c(1 - \ln(c))$ si, et seulement si, $u = c$.

(c) La fonction f_c est continue et strictement décroissante sur $]0;c]$ donc elle réalise une bijection de $]0;c]$ dans $f_c(]0;c]) = [c(1 - \ln(c));+\infty[$.
Ainsi, un réel $M \geqslant c(1 - \ln(c))$ admet un unique antécédent par f_c dans $]0;c]$ que nous noterons b.
De même, un réel $M \geqslant c(1 - \ln(c))$ admet un unique antécédent par f_c dans $[c;+\infty[$ que nous noterons B.

On a alors, si $u \leqslant c$, $f_c(u) \leqslant M \Leftrightarrow u \geqslant b$ et si $u \geqslant c$, $f_c(u) \leqslant M \Leftrightarrow u \leqslant B$.
Donc :

$$f_c(u) \leqslant M \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b \leqslant u \leqslant c \\ \text{ou } c \leqslant u \leqslant B \end{array} \right. \Leftrightarrow b \leqslant u \leqslant B.$$

7. *Pour la suite de cette partie il faut remarquer que les fonctions x et y ne s'annulent jamais, ce qui n'est pas demandé dans ce sujet, ni même précisé.*
Pour démontrer cela on peut utiliser un raisonnement tel que celui de la question 2.c).

(a) i. On remarque que $V(x,y) = f_a(x) + f_1(y)$.
D'après la question 6.a), pour tout $y > 0$, $f_1(y) \geqslant 1$.
Donc, pour tout $s \geqslant 0, V(x(s), y(s)) \geqslant f_a(x(s))+1$, et ainsi $f_a(x(s)) \leqslant V(x(s), y(s))-1$.
De même, d'après la question 6.a), $f_a(x) \geqslant a(1 - \ln(a))$.
Donc,pour tout $s \geqslant 0$, $V(x(s), y(s)) \geqslant a(1 - \ln(a)) + f_1(y(s))$, et ainsi $f_1(y(s)) \leqslant V(x(s), y(s)) - a(1 - \ln(a))$.

ii. La fonction $h : s \mapsto V(x(s), y(s))$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} \forall s \geqslant 0, \quad h'(s) &= x'(s) - a\frac{x'(s)}{x(s)} + y'(s) - \frac{y'(s)}{y(s)} \\ &= x(s) - x(s)y(s) - a\frac{x(s) - x(s)y(s)}{x(s)} - ay(s) + x(s)y(s) - \frac{-ay(s) + x(s)y(s)}{y(s)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction $s \mapsto V(x(s), y(s))$ est de dérivée nulle sur l'intervalle $[0; +\infty[$ donc elle est constante sur cet intervalle.

iii. Notons C la constante telle que $\forall s \geqslant 0$, $V(x(s), y(s)) = C$.
On a donc montré que $f_a(x(s)) \leqslant C-1$. De plus $C-1 \geqslant a(1-\ln(a))$ (*car* $f_a(x(s)) \geqslant a(1-\ln(a))$ donc, d'après la question 6.c) il existe b_x et B_x tels que $b_x \leqslant x(s) \leqslant B_x$.
De même $f_1(y(s)) \leqslant C - a(1-\ln(a))$ et $C - a(1-\ln(a)) \geqslant 1(1-\ln(1))$ donc, d'après la question 6.c) il existe b_y et B_y tels que $b_y \leqslant y(s) \leqslant B_y$.

(b) On rappelle que $V(x,y) = f_a(x) + f_1(y)$ et d'après la question 6.a), $f_a(x) \geqslant a(1 - \ln(a))$ et $f_1(y) \geqslant 1$. Donc, $V(x,y) \geqslant 1 + a(1 - \ln(a))$.
De plus,

$$\begin{aligned} V(x,y) = 1 + a(1 - \ln(a)) &\Leftrightarrow \underbrace{(f_a(x) - a(1 - \ln(a)))}_{\geqslant 0} + \underbrace{(f_1(y) - 1)}_{\geqslant 0} = 0 \\ &\Leftrightarrow f_a(x) - a(1 - \ln(a)) = 0 \text{ et } f_1(y) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow f_a(x) = a(1 - \ln(a)) \text{ et } f_1(y) = 1 \\ &\Leftrightarrow x = a \text{ et } y = 1 \end{aligned}$$

Ainsi $(x^*, y^*) = (a, 1)$.

(c) i. La question 7.a.(iii) permet de justifier dans ce sujet que les populations ne peuvent pas s'éteindre car x et y sont minorées par des constantes strictement positives

(*comme noté au début de la question 7. c'est quelque chose qu'il aurait fallu prouver avant pour avoir le droit de calculer* $V(x(s), y(s))$.

Cette même question montre que les fonctions x et y sont majorées donc les populations ne peuvent pas devenir arbitrairement grandes.

ii. Les populations deviennent constantes si, et seulement s'il existe t tel que $x(t) = a$ et $y(t) = 1$ (question 5.a)).

Cela signifie donc que $V(x(t), y(t)) = 1+a(1-\ln(a))$. Or la fonction $s \mapsto V(x(s), y(s))$ est constante. Donc, pour tout $s \geqslant 0$, $V(x(s), y(s)) = 1+a(1-\ln(a))$ et ainsi, $x(s) = a$ et $y(s) = 1$.

Ainsi, les populations n'évoluent pas si, et seulement si, $x_0 = a$ et $y_0 = 1$.

iii. D'après les questions précédentes, si on ne part pas du point d'équilibre $(a, 1)$ les populations ne s'arrêtent pas d'évoluer, ne s'éteignent pas et ne deviennent pas arbitrairement grandes. De plus, étant donné que $s \mapsto V(x(s), y(s))$ est constante on peut penser que les fonctions x et y ont un comportement oscillatoire et périodique.

3 Modèle proie-prédateur avec environnement limité

8. Pour K très grand on se rapproche du système (5) de la partie précédente.
Pour $y = 0$, on retrouve l'équation (2) de la partie 1.

9. On a :

$$\begin{cases} x\left(1-\dfrac{x}{K}\right) - xy = 0 \\ -ay + xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(1-\dfrac{x}{K}\right) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 - \dfrac{a}{K} \\ x = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = K \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 - \dfrac{a}{K} \\ x = a \end{cases} .$$

Il faudrait ici une hypothèse $a < K$ *pour être sûrs que* $1 - \dfrac{a}{K}$ *soit positif et rentre bien dans notre étude.*

Les points d'équilibre sont $(0, 0)$, $(K, 0)$, $\left(a, 1 - \dfrac{a}{K}\right)$.

Interprétation :

— $(0, 0)$: aucune population.
— $(K, 0)$: population stable de lièvre et pas de lynx.
— $\left(a, 1 - \dfrac{a}{K}\right)$: position d'équilibre entre les deux populations.

10. (a) Ici $g_1(x, y) = x\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) - xy$ et $g_2(x, y) = -ay + xy$.

On a donc :

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{x}{K} - \frac{x}{K} - y = 1 - \frac{2x}{K} - y$$
$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = -x$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = y$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = -a + x$$

On a donc $J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2x}{K} - y & -x \\ y & x - a \end{pmatrix}$.

(b) $J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, $J(K,0) = \begin{pmatrix} -1 & -K \\ 0 & K-a \end{pmatrix}$, $J\left(a, 1 - \dfrac{a}{K}\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{K} & -a \\ 1 - \dfrac{a}{K} & 0 \end{pmatrix}$.

(c) La matrice J_1 est diagonale et la matrice J_2 est triangulaire donc pour ces deux matrices on peut lire leurs valeurs propres sur la diagonale.
$\mathrm{sp}(J_1) = \{1; -a\}$ et $\mathrm{sp}(J_2) = \{-1; K - a\}$.
Comme $J_3 \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de J_3 si, et seulement si $J_3 - \lambda I_2$ n'est pas inversible, c'est-à-dire si, et seulement si $\det(J_3 - \lambda I_2) = 0$.
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\det(J_3 - \lambda I_2) = \left(-\dfrac{a}{K} - \lambda\right) \times (-\lambda) - \left(1 - \dfrac{a}{K}\right) \times (-a) = \lambda^2 + \dfrac{a}{K}\lambda + a\left(1 - \dfrac{a}{K}\right)$.
Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = \dfrac{a^2}{K^2} - 4a\left(1 - \dfrac{a}{K}\right) = \dfrac{a(a - 4K^2 + 4aK)}{K^2}$.
Comme $a > 0$, Δ est du signe de $a - 4K^2 + 4aK$. On peut donc distinguer les 3 cas suivants :

- Si $a - 4K^2 + 4aK > 0$, alors J_3 admet 2 valeurs propres complexes distinctes qui sont $-\dfrac{a}{2K} \pm ß\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.
- Si $a - 4K^2 + 4aK = 0$, alors J_3 admet une seule valeur propre (réelle) qui est $-\dfrac{a}{2K}$.
- Si $a - 4K^2 + 4aK > 0$, alors J_3 admet deux valeurs propres réelles distinctes qui sont $-\dfrac{a}{2K} \pm \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$.

(d)
- Point $(0,0)$: la matrice J_1 admet deux valeurs propres réelles vérifiant $-a < 0 < 1$, on est donc dans le cas 1 figure (c), $(0,0)$ est donc un point selle.
- Point $(K,0)$: les valeurs propres de $J(K,0)$ sont -1 et $K - a$ donc il faut discuter suivant les valeurs de K et a :
  * Si $K - a = -1$, il y a une seule valeur propre qui est $-1 < 0$ et $\dim(E_{-1}) = 1$ donc on est dans le cas 3 figure (c), $(K,0)$ est un nœud dégénéré stable.
  * Si $K - a \neq -1$ et $K - a < 0$: on est dans le cas 1 figure (a). $(K,0)$ est un nœud stable.
  * Si $K - a \neq -1$ et $K - a > 0$: on est dans le cas 1 figure (c), $(K,0)$ est un point selle.

— Point $\left(a, 1-\dfrac{a}{K}\right)$: la matrice jacobienne est la matrice J_3 donc nous devons revenir à nos différents cas étudiés dans la question précédente.

* Si $a-4K^2+4aK>0$, il y 2 valeurs propres complexes distinctes qui ont une partie réelle strictement négative donc on est dans le cas 2, figure (a). Le point $\left(a, 1-\dfrac{a}{K}\right)$ est un foyer stable.
* Si $a-4K^2+4aK=0$, il y a une seule valeur propre qui est strictement négative et J_3 n'est pas diagonalisable (on peut faire un petit raisonnement par l'absurde pour le prouver) donc $\dim(E_\lambda)=1$. On est donc dans le cas 3, figure (c). Le point $\left(a, 1-\dfrac{a}{K}\right)$ est un nœud dégénéré stable.
* Si $a-4K^2+4aK>0$, il y a deux valeurs propres réelles distinctes qui sont $-\dfrac{a}{2K}\pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$. L'une d'elle est évidemment strictement négative et pour étudier le signe de $-\dfrac{a}{2K}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$, il faut comparer Δ et $\dfrac{a^2}{K^2}$.
  Or $\Delta=\dfrac{a^2}{K^2}-4a\left(1-\dfrac{a}{K}\right)$ donc cela revient) étudier le signe de $1-\dfrac{a}{K}$.
  On a de nouveaux des sous-cas.
  Si $a<K$, $\Delta<\dfrac{a^2}{K^2}$ donc les deux valeurs propres sont strictement négative. On est dans le cas 1, figure (a). Le point $\left(a, 1-\dfrac{a}{K}\right)$ est un nœud stable.
  Si $a>K$, on est dans le cas 1, figure (c), le point $\left(a, 1-\dfrac{a}{K}\right)$ est un point selle.

(e) Je vous laisse le soin d'interpréter tout cela !

4 Résolution numérique du système différentiel

Remarque : encore une fois l'énoncé est mal posé car la suite (v_k) n'est pas définie si on choisit mal les valeurs de x_0 et y_0. Par exemple pour $x_0=1$ et $y_0=2+\dfrac{1}{h}$, $x_1=-h<0$ donc $V(x_1,y_1)$ n'existe pas.

11. Pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{k+1}-v_k &= V(x_{k+1},y_{k+1})-V(x_k,y_k)\\ &= x_{k+1}-a\ln(x_{k+1})+y_{k+1}-\ln(y_{k+1})-x_k+a\ln(x_k)-y_k+\ln(y_k)\\ &= h(x_k-x_ky_k)+h(-ay_k+x_ky_k)-a\ln(1+h(1-y_k))-\ln(1+h(x_k-a))\\ &= hx_k-ahy_k-a\ln(1+h(1-y_k))-\ln(1+h(x_k-a)). \end{aligned}$$

On pourra se demander pourquoi l'énoncé nous parle ici de K....

12. (a) D'après la question 6.(a) (avec $c=1$), pour tout $u>0$, $u-\ln(u)\geqslant 1$. (*avec égalité si, et seulement si $u=1$*)

Donc : (*en supposant que le calcul ci-dessus est bien licite donc que les quantités présentes dans les* ln *sont bien strictement positives)*

$$\begin{aligned} -\ln(1+h(1-y_k)) &\geqslant 1-(1+h(1-y_k)) = -h+hy_k \\ \text{et } -\ln(1+h(x_k-a)) &\geqslant 1-(1+h(x_k-a)) = -hx_k+ah \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} v_{k+1}-v_k &\geqslant hx_k - ahy_k - ah + ahy_k - hx_k + ah \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Dans l'inégalité précédente, il y a égalité si, et seulement si, les deux inégalités utilisées sont des égalités.
Ainsi :

$$\begin{aligned} v_{k+1}-v_k = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+h(1-y_k)=1 \\ 1+h(x_k-a)=1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y_k = 1 \\ x_k = a \end{cases} \end{aligned}$$

On peut alors montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant k$, $(x_n, y_n) = (a, 1)$. Donc la suite est constante à partir du rang k.
On ne peut toutefois pas prouver que les termes précédents de la suite sont aussi égaux à $(a, 1)$.
On se retrouve une nouvelle fois avec un énoncé mal posé. Si on rajoute comme hypothèse « $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1}-v_k = 0$ » alors oui on a répondu à la question !

13. Dans la question 7.(a) ii., on a vu que si (x, y) est une solution de (5) alors $s \mapsto V(x(s), y(s))$ est une fonction constante.
Or ici, on vient de voir que si $V(x_k, y_k)$ est constante alors (x_k, y_k) est constante.
La suite (x_k, y_k) ne peut donc pas constituer une bonne approximation du couple de fonctions (x, y) puisque ces fonctions ne sont pas obligatoirement constantes.
La méthode d'Euler ne semble donc pas satisfaisante.

5 Étude informatique

14. (a) Il faut écrire en en-tête : `import math as m`.
(b) `liste(1,0.2)` renvoie `[0,0.2,0.4,0.6,0.8,1]`.
`liste(1,0.3)` renvoie `[0,0.3,0.6,0.9]`.
De manière générale `liste(T,h)` renvoie la liste des kh pour k allant de 0 à $\left\lfloor \dfrac{T}{h} \right\rfloor$.
(c) La liste `Ls` contient les valeurs de $\exp(2k/100)$ pour k allant de 0 à 2000.
La fonction `mystere` trace l'allure de la fonction $x \mapsto \exp(2x)$ sur l'intervalle $[0; 20]$.

15. (a) i. `L[1]=[7]`
    ii. `L[0][1]=1`
    iii. `len(L)=3`
    iv. On aura alors `L=[[3,1],[7],[1,9,8,0],9.75]`.

    (b)
```
def lapin(x,y):
    return x-x*y

def lynx(x,y):
    return -a*y+x*y
```

    (c)
```
def resol_1(x0 ,y0 ,T ,h):
    x = x0; y = y0
    t = 0
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    Lt = [t]
    while t+h <= T:
        t=t+h
        Lt.append(t)
        (x,y)=(x+h*lapin(x,y),y+h*lynx(x,y))
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
    return [Lt, Lx, Ly]
```

    (d) La lite `L` contient 3 listes : la liste des valeurs des t_k, la liste des valeurs des x_k, la liste des valeurs des y_k.

    `plt.plot(L[0],L[1])` permet de tracer la courbe reliant les points de coordonnées (t_k, x_k).

    `plt.plot(L[0],L[2])` permet de tracer la courbe reliant les points de coordonnées (t_k, y_k).

    (e) Les valeurs initiales $x_0 = 1$ et $y_0 = 0,5$ nous permettent d'identifier les courbes.

    La courbe pleine correspond donc à une approximation de la fonction x et la courbe pointillée correspond à une approximation de la fonction y.

    (f)
```
def trace_V_1():
    L=resol_1(x0,y0,T,h)
    V=[fonctionV(L[1][k],L[2][k]) for k in range(len(L[1]))]
    plt.plot(L[0],V)
    plt.show()
```

16. (a)
```
def resol_2(x0,y0,T,h):
    x=x0 ; y=y0
    t=0
    Lx=[x]
    Ly=[y]
    Lt=[t]
    while t+h<=T:
        t=t+h
        Lt.append(t)
```

```
        u=Lx[-1]+h*lapin(Lx[-1],Ly[-1]) #uk
        w=Ly[-1]+h*lynx(Lx[-1],Ly[-1]) #vk
        x=Lx[-1]+h/2*(lapin(Lx[-1],Ly[-1])+lapin(u,w)) #x_{k+1}
        y=Ly[-1]+h/2*(lynx(Lx[-1],Ly[-1])+lynx(u,w)) #y_{k+1}
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
    return [Lt,Lx,Ly]
```

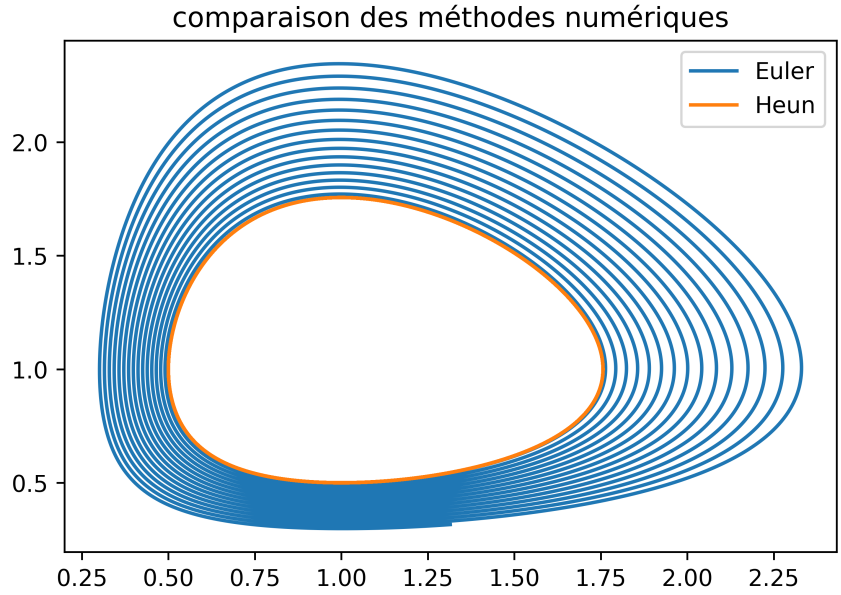
(b)
```
def trace_V_2():
    L=resol_2(x0,y0,T,h) #Ligne modifiée
    V=[fonctionV(L[1][k],L[2][k]) for k in range(len(L[1]))]
    plt.plot(L[0],V)
    plt.show()
```

(c) En théorie, si (x, y) est une solution de notre système la fonction $s \mapsto V(x(s), y(s))$ est supposée être constante.

Sur la figure 2 à gauche la fonction V n'est vraiment pas du tout constante alors qu'à droite on s'approche plus d'une fonction constante.

La méthode de Heun semble donc plus satisfaisante.

17. La différence entre les deux figures est vraiment très très subtile... Il fallait ici remarquer que sur la figure 1, les effectif maximaux à chaque « pic » semblent légèrement augmenter donc il n'y a pas de réelle périodicité. Cela peut venir d'une accumulation des erreurs d'approximation. Complément on peut tracer les solutions dans l'espace des phases, c'est à dire mettre en absicces la valeur $x(t)$ et en ordonnée la valeur de $y(t)$.



18. Il suffit ici de rédiger une réponse « bla bla » sur le fait que lorsqu'il y a plus de lynx, ils mangent plus de lièvres et lorsqu'il ne reste plus assez de lièvres, les lynx peinent à se nourrir donc leur population diminue.