Lycée Champollion, Grenoble **2023-2024**
T.D. de Mathématiques BCPST Spé 2

Complexes et polynômes

Complexes et trigonométrie

Exercice 1.
Calculer la partie réelle, la partie imaginaire et le module des nombres suivants :

1. $\dfrac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathbf{i}}$
2. $\dfrac{1+2\mathbf{i}}{3+4\mathbf{i}}$
3. $\dfrac{\mathbf{i}-1}{\mathbf{i}+1}$
4. $(1+\mathbf{i})^3$

Exercice 2.
Mettre sous forme trigonométrique ou exponentielle :

1. $1+\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$
2. $1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$
3. $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta'}$
4. $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta'}$

Exercice 3.
Pour $z=a+\mathbf{i}\,b$ un nombre complexe, on pose :

$$\exp(z)=\exp(a)\exp(\mathbf{i}\,b)$$

1. calculer $|\exp(z)|$ et $\arg(\exp(z))$
2. Montrer que cette définition respecte les propriétés « classiques »de l'exponentielle.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z=\mathbf{i}$

Exercice 4.
Exprimer en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$

1. $\cos(3x)$
2. $\sin(3x)$
3. $\cos(5x)$
4. $\sin(6x)$

Exercice 5.
Linéariser les expressions suivantes :

1. $\cos(x)\sin(x)$
2. $\cos^3(x)\sin^3(x)$
3. $\sin^4(x)$
4. $\cos^4(x)$

Puis calculer l'intégrale entre 0 et $\pi/2$ de l'expression

Exercice 6.
Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$; on pose :

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\cos(x)+\cos(2x)+\cdots+\cos((n-1)x)+\cos(nx)$$

$$S_2=\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\sin(x)+\sin(2x)+\cdots+\sin((n-1)x)+\sin(nx)$$

1. Calculer $S_1+\mathbf{i}\,S_2$. En déduire S_1 et S_2.
2. Si $x\not\equiv 0[2\pi]$ retrouver le résultat précédent en calculant $\sin(x/2)S_1$ et $\sin(x/2)S_2$.

Exercice 7.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on pose pour $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ $\quad z_k=\mathrm{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{n}}$. Pour $p\in\mathbb{N}$ on pose :

$$S_p=z_0^p+z_1^p+\cdots+z_{n-2}^p+z_{n-1}^p=\sum_{k=0}^{n-1}z_k^p.$$

Calculer S_p.

Exercice 8 ( ).

Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \qquad S_2 \sum_{k=0}^{n} \cos\left(kx+y\right)$$

Exercice 9.
Le but de cet exercice est de calculer $s = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $c = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

1. Calculer $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ en fonction de c et s
2. Montrer que c est solution de l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$.
3. En déduire une valeur de c et de s.

Exercice 10 (Équation trigonométrique)**.**
Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $\cos(x) = 1/2$
2. $\sin(x) = 1$
3. $\tan(x) = \sqrt{3}$
4. $\cos(2x) = \frac{1}{2}$
5. $\sin(x+1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\cos(x) + \sin(x) = 0$
7. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$
8. $\sqrt{3}\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{3}$

Exercice 11 (Équations trigonométriques)**.**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\tan(x) + \tan(2x) = \tan(3x)$
2. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$

Exercice 12 (Exemple de racines nièmes)**.**
En écrivant les membre de gauche et de droite sous forme exponentielle, résoudre les équations suivantes, représenter les solutions dans le plan complexe

1. $z^4 = 1$
2. $z^5 = \mathbf{i}$
3. $z^3 = 1$
4. $z^n = 1$

Exercice 13 ( )**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$\omega_0 = \mathrm{e}^{k\mathbf{i}\,2\pi/n} \qquad U_n = \left\{\omega_0^k \middle/ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

1. Montrer que si $z \in \mathbb{U}_n$ alors $z^k \in \mathbb{U}_n$ et $\overline{z} \in \mathbb{U}_n$
2. Calculer $\prod_{z\in\mathbb{U}_n} z$ et $\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1|$

Polynômes

Définitions

Exercice 14.
Calculer le degré et le coefficient dominant de :

1. $X^3 - 3iX + X(X-2+i)^2$
2. $(X-2)^n - (X+1)^n$
3. $\prod_{k=0}^{n} (X^k - 2^k)$

Exercice 15.
Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$

$$P(X^2) = X^2 P$$

On commencera par trouver une condition nécessaire sur le degré d'une solution.

Exercice 16 ( )**.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$P_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right]$$

Montrer que $P_n \in \mathbb{R}[X]$, calculer son degré, son coefficient dominant.

Exercice 17.
En calculant de deux façons les coefficients du polynôme $(X+1)^{n+m}$ montrer que :

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k}$

Factoriser dans $\mathbb{C}$ les polynômes suivants

1. $X^2 + 1$
2. $X^4 + 2X^2 + 1$
3. $X^4 - X^2$
4. $X^4 + \mathbf{i}$
5. $X^3 + X^2 + 2X + 2$ on commencera par chercher une racine évidente

Exercice 18.
On note $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Monter par récurrence que ces polynômes n'ont que des racines simples dans $\mathbb{C}$

Exercice 19 (relations coefficients/racines)**.**
Soit $= aX^3 + bX^2 + cX + d$ on suppose que P admet dans $\mathbb{C}$ trois racines x_1 ; x_2, x_3.

1. Exprimer $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ et $\frac{d}{a}$ en fonction des racines.
2. Se servir de ce résultat pour résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants.
   (a)
   $$\begin{cases} xyz = -1 \\ xy + yz + xz = -2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$
   (b)
   $$\begin{cases} xyz = -1 \\ xy + yz + xz = -2 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$$
   (c)
   $$\begin{cases} xyz = -3 \\ x + y + z = -5 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 17 \end{cases}$$

Pour aller plus loin

Exercice 20.
On considère le polynôme $P = X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1$

1. Trouver les racines de P dans $\mathbb{C}$ (*penser à l'exercice 12*).
2. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$
3. Montrer que pour $k \in [\![0, n]\!]$

$$\sin \frac{k\pi}{n} = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}}{2i}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)$$

en déduire

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

4. Trouver une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 21 (Expression de la dérivée $n$ième)**.**
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$ on note

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Soit $P = \sum a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Démontrer que pour $\ell \in \mathbb{N}$

$$P^{(\ell)} = \sum_{k \geqslant \ell} A_k^\ell a_k X^{k-\ell}$$

Exercice 22 (Valuation)**.**
Soit $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul. On nomme valuation de P et on note $\mathrm{val}(P)$ le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$.

1. Que va-t-on choisir comme valuation du polynôme nul ?
2. Montrer que $\mathrm{val}(P+Q) \geqslant \min(\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q))$. Donner un cas d'égalité.
3. Montrer que $\mathrm{val}(PQ) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$