ESPACES VECTORIELS

Dans tout ce TD $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Sev

Exercice 1.
Déterminer si les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels ? de$\mathbb{R}^?$.

1. $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y - z = x + 2y + 3z = 0\right\}$
2. $B = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x + y - z + 3t = 1\right\}$
3. $C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y^2 - z = 0\right\}$
4. $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y - z = 0\right\}$

Exercice 2.
Les ensembles suivants sont ils des sous espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$?

1. $A = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(1) = 0\right\}$
2. $B = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(1) = 3\right\}$
3. $C = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P' = 0\right\}$
4. $D = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(1) = P(0)\right\}$
5. $E = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(1) \leqslant P(0)\right\}$
6. $F = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P \text{ admet 1 comme racine double}\right\}$
7. $G = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P \text{ admet une racine double}\right\}$

Exercice 3.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec les bonnes conditions). Les ensembles suivants sont ils des sous espaces vectoriels ?

1. $A = \left\{f \in \mathbb{R}^I \text{ tel que } f(1) = 0\right\}$
2. $B = \left\{f \in \mathbb{R}^I \text{ tel que } f \text{ est continue } et \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$
3. $C = \left\{f \in \mathbb{R}^I \text{ tel que } \lim_0 f = 0\right\}$

Exercice 4.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1. Montrer à l'aide d'un contre exemple que si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $F \cup G$ n'est pas forcément un sous espace vectoriel.
   On cherche maintenant une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E
2. Condition ????.
   Montrer que si $F \cup G$ est un sous espace vectoriel alors :
   $$F \subset G \quad \text{ou} \quad G \subset F$$
   Indication : raisonnement par contraposée
3. Conclure

Exercice 5.
Les ensembles suivants sont ils des sous espace vectoriels de $\mathbb{C}$?

1. $i\mathbb{R}$
2. $\{z \in \mathbb{C} \,/\, z = \overline{z}\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} \,/\, z^2 \in \mathbb{R}\}$

Familles libres, familles génératrices

Exercice 6.
On pose $E = \mathbb{R}^3$ Soit

$$\mathscr{B}_1 = \big((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\big)$$

,

$$\mathscr{B}_2 = ((1,2,1), (1,-1,1), (2,1,-1))$$

Montrer que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ forment des bases de $\mathbb{R}^3$ et pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ calculer les coordonnées de (x, y, z) dans chacune des bases.

Exercice 7.
Soit $x_1 = (1,0,\dots,0) \in \mathbb{K}^n$, $x_2 = (1,1,0\dots,0) \in \mathbb{K}^n \dots x_? = (1,1,1,\dots,1) \in \mathbb{K}^n$. Étudier la famille $(x_1,\dots,x_?)$.

Exercice 8.
Soit $P_1, P_2, \dots, P_n$ une famille de n polynômes à une indéterminé à coefficients dans $\mathbb{K}$. On suppose que les degrés des P_i sont strictement croissants et $P_1 \neq 0$.

1. Montrer que la famille est libre.
2. Est elle forcément génératrice ?
3. Trouver une famille de polynômes (avec plus d'un polynôme) dont tous les éléments sont de même degré et qui soit libre (on se placera dans $\mathbb{K}_2[X]$

Exercice 9.
Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note

$$f_1 = e_1 \qquad f_2 = e_2 + e_1 \qquad f_3 = e_3 + e_1 \quad f_4 = e_4 + e_1$$

1. On suppose que (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre, montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.
2. On suppose que (e_1, e_2, e_3, e_4) est génératrice, montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est génératrice

Exercice 10.
En s'inspirant des procédés vus en classe.

1. On pose $e_1 = (1,1,0,0)$ et $e_2 = (-1,1,-1,1)$ compléter e_1, e_2 en une base de $\mathbb{R}^4$
2. On pose $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (-1,1)$, $e_3 = (1,0)$, $e_4 = (1,2)$ réduire (e_1, e_2, e_3, e_4) en une base de $\mathbb{R}^2$

Exercice 11.
On note E l'espace vectoriel des application continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. la famille $(\cos, \sin)$ est elle libre ? Est elle une famille génératrice de E ?
2. Montrer que la famille $\left(x \mapsto \mathrm{e}^{kx}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre (pensez au théorème des croissances comparées ou au principe d'identification) . Est ce une famille génératrice de E ?

Exercice 12 (▲).

1. Pour p et q deux entiers naturels calculer

$$I_{p,q} = \int_0^{\pi} \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x$$

2. Montrer que pour n un entier naturel non nul la famille $(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x), \dots, x \mapsto \cos(nx))$ est libre (faire une récurrence). Est ce une famille génératrice de E ?

Exercice 13.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E, on note

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^n & \to & E \\ & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n \end{array}$$

1. Montrer que φ est injective si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre/génératrice (rayer la mention inutile).
2. Montrer que φ est surjective si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre/génératrice (rayer la mention inutile).
3. Trouver une CNS pour que $\mathscr{F}$ soit une base

Exercice 14.
Calculer la dimension de A.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$ $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + z = x + 2y = 0\}$
3. $E = \mathbb{C}_3[X]$ $A = \left\{P \in \mathbb{C}_3[X] \,/\, P' = 0\right\}$
4. $E = \mathbb{R}_4[X]$ $A = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \,/\, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$

Exercice 15.
Calculer le rang des familles suivantes, en déduire leurs caractéristiques.

1. dans $\mathbb{R}^3$ $e_1 = (1,1,1), e_2 = (1,1,2), e_3 = (2,1,1), e_4 = (1,2,1)$
2. dans $\mathbb{C}^4$ $e_1 = (1,1,0,0)$ $e_2 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (1,-1,1,-1)$, $e_4 = (1,1,1,1)$
3. dans $\mathbb{R}_3[X]$ X, $X^2 - X$, $X^3 - X^2$, $X^3 - X$

Exercice 16.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on note $\mathscr{H}_\alpha$ la famille

$$\mathscr{H}_\alpha = ((1,-1,0,2),(1,0,1,2),(1,3,5,7),(0,2,3,\alpha))$$

calculer en fonction de α le rang de $\mathscr{H}_\alpha$

Exercice 17 ().
Soit A et B deux sev de E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Montrer que $A \cap B$ est de dimension finie et majorer Dim $A \cap B$)

Exercice 18.
Soit F l'ensemble des matrices 2×2 vérifiant

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ b = c = 0 \right\}$$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Trouver une base de F

Exercice 19.
Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et a, b deux réels distincts. On désigne par F l'ensemble des polynômes de E dont a et b sont racines. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base.

Exercice 20.
Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $F = \left\{ f \in E \big/ f'' = 2f' - f \right\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E
2. Montrer que $F \neq E$.
3. Soient les fonctions définies ppour x réel par

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x \qquad f_2(x) = x\mathrm{e}^x$$

Montrer que f_1 f_2 forment une famille libre de F.

Matrices : calculs

Exercice 21.
Soit $\lambda_1, \dots \lambda_n$ des réels non nuls. Calculer l'inverse de la matrice diagonale.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exercice 22.

Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Exercice 23.

Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad J^n = 6^{n-1} J$ où $J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 24.

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = B + 2I$

Calculer B^2 puis, à l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n.

Exercice 25.

Pour chacune des matrices suivantes, exprimer A sous la forme $I + B$ puis calculer A^n en utilisant la formule du binôme :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 26.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que l'inverse de P est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

.

2. Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$ et explicter A^n.

Exercice 27.

On considère la matrice A suivante : $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, A^3 et montrer que : $A^3 = 6A - A^2$
2. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels a_n et b_n tels que : $A^n = a_nA^2 + b_nA$
   Donner a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3.
3. Montrer que a est une suite récurrente d'ordre 2 puis expliciter a_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de b_n et déterminer tous les coefficients de la matrice A^n

Exercice 28.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ calculer $A^2 - 3A + 4I_2$ puis A^{-1}. Calculer l'inverse des matrices suivantes.

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. dans $\mathbb{R}_2[X]$ de la base $(1, 1+X, 1+X^2)$ à la base $(X(X-1), X(X+1), (X+1)(X-1)$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$ de $((1,2,1),(1,0,1),(0,2,2))$ à $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$
4. dans E de $(e_1, \cdots, e_n)$ à $(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1)$
5. dans E de $(e_1, \cdots, e_n)$ à $(e_1, e_1+e_2 \cdots, e_1+e_n)$

Matrices : théorie

Exercice 30 (Opérations sur les lignes et les colonnes)**.**
On note $(E_{i,j})_{i,j}$ la base canonique de l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; Calculer
$$E_{i,j} A$$
2. Soit
$$T_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$$
   (a) Donner une forme explicite de $T_{i,j}$.
   (b) Calculer $T_{i,j} A$
   (c) Calculer $T_{i,j}^{-1}$
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $L_{i,j} = I_n + \lambda E_{i,j}$
   (a) Donner une forme explicite de $L_{i,j}$.
   (b) Calculer $L_{i,j} A$
   (c) Calculer, quand elle existe, $L_{i,j}^{-1}$
4. Que ce passe t'il si on remplace les multiplications à gauche par des multiplications à droite ?

Rang : calculs

Exercice 31.
Calculer le rang des matrices suivantes

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{z} & \overline{z}^2 \\ z & 1 & \overline{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_n & 0\cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 29.

Écrire les matrices de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ dans les cas suivants

1. dans $\mathbb{R}_3[X]$ de la base canonique à $(1, 1+X, 1+X^2, 1+X^3)$

2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

5. rg $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$ en fonction de $m \in \mathbb{C}$.

6. rg $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix}$ en fonction de a et b.

Exercice 32.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que la suite a est arithmético-géométrique.
3. En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression A^n en fonction de n

Exercice 33.

Soit (e_1, e_2, e_3) une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\mathscr{B}$ une base de E. Soit A la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3).

1. On suppose qu'après avoir effectuer l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ puis $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2$ on ai transformé A en une matrice du type

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$$

   Exprimer e_3 en fonction de de e_2 et e_1

2. En déduire une méthode générale pour trouver des combinaisons linéaires dans une famille liée