Espaces vectoriels.

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Novembre 2023

Table des matières

Dans tout ce cours $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels

I.1 Définition

Définition 1 (Loi interne et loi externe)**.**
*Une **loi interne** sur E est une application*

$$\begin{array}{rcl} * : & E\times E & \to & E \\ & (x,y) & \mapsto & x*y \end{array}$$

*Une **loi externe** (à gauche) sur E est une application*

$$\begin{array}{rcl} \bullet : & \mathbb{K}\times E & \to & E \\ & (\lambda,y) & \mapsto & \lambda\bullet y \end{array}$$

Définition 2 (Espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$)**.**
*Un **espace vectoriel** est un ensemble E, munit d'une loi interne "+" et d'une loi externe "·" qui vérifient*

1. *+ est associative et commutative* i.e.
$$\forall \mathbf{x}\in E,\ \forall \mathbf{y}\in E,\ \forall \mathbf{z}\in E \qquad \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$$
2. *Il existe un élément $\mathbf{0_E}$ (noté plus tard 0 lorsqu'il n'y a pas ambiguïté) tel que*
$$\forall \mathbf{x}\in E \quad \mathbf{x}+\mathbf{0_E}=\mathbf{x}$$
3. *Tout élément de E est inversible pour $+$* i.e.
$$\forall \mathbf{x}\in E \quad \exists \mathbf{y}\in E \quad \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0_E}$$
4. $$\forall \mathbf{x}\in E \quad 1_{\mathbb{K}}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$$
5. $$\forall \mathbf{x}\in E,\ \forall \mu\in\mathbb{K},\ \forall\lambda\in\mathbb{K} \quad \mu\cdot(\lambda\cdot\mathbf{x})=(\lambda\mu)\cdot\mathbf{x}$$
6. $$\forall \mathbf{x}\in E,\ \forall \mu\in\mathbb{K}, \forall\lambda\in\mathbb{K} \quad (\mu+\lambda)\cdot\mathbf{x}=(\lambda\cdot\mathbf{x})+(\mu\cdot\mathbf{x})$$
7. $$\forall \mathbf{x}\in E,\ \forall \mathbf{y}\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{K} \quad \lambda\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})=(\lambda\cdot\mathbf{x})+(\lambda\cdot\mathbf{y})$$

Par convention on décide que "·" est prioritaire sur l'addition.
Attention : La notation $\mathbf{x}$ ne sera utilisée qu'en début de cours. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, on notera x. Lorsque l'on adoptera un point de vue géométrique, on pourra trouver la notation $\overrightarrow{x}$.

Vocabulaire et notation. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

- Un élément de $\mathbb{K}$ est un **scalaire**.
- Un élément de E est un **vecteur**.
- $\mathbb{K}$ est le **corps de base**.
- E est un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel**.

Proposition 1 (Premières propriétés)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

- *Pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de E il existe un unique vecteur $\mathbf{y}$ de E tel que $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0_E}$ Ce vecteur $\mathbf{y}$ est le **symétrique** ou l'**opposé** de $\mathbf{x}$ pour l'addition, il est noté $-\mathbf{x}$*
- *Pour tout vecteur $\mathbf{x}\in E$ et tout scalaire $\lambda\in\mathbb{K}$ on a $\lambda\cdot\mathbf{0_E}$ et $0_{\mathbb{K}}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0_E}$*
- *Pour tout vecteur $\mathbf{x}\in E$ et tout scalaire $\lambda\in\mathbb{K}$ on a*

$$\lambda\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0_E} \text{ si et seulement si } \lambda=0_{\mathbb{K}} \text{ ou } \mathbf{x}=\mathbf{0_E}$$

- *Pour tout vecteur $\mathbf{x}\in E$ on a $-\mathbf{x}=(-1)\cdot\mathbf{x}$*

Démonstration :

Définition 3 (Combinaisons linéaires)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel

- *Une **combinaison linéaire** est un élément de e de la forme $\lambda\cdot\mathbf{x}+\mu\cdot\mathbf{y}$ où $\lambda\in\mathbb{K}$, $\mu\in\mathbb{K}$, $\mathbf{x}\in E$ et $\mathbf{y}\in E$.*
- *Plus généralement une **combinaison linéaire** est un élément de E de la forme*

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\mathbf{x_i}$$

où $n\in\mathbb{N}^*$, et pour $i\in[\![1,n]\!]$ $\lambda_i\in\mathbb{K}$ et $\mathbf{x_i}\in E$.

I.2 Exemples fondamentaux

Dans chaque cas on munit ces ensembles des opérations « naturelles ».

Théorème 1 (Les espaces vectoriels de référence)**.**

- $\mathbb{K}^n$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*
- $\mathbb{K}[X]$*, l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans* $\mathbb{K}$*, est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$*.*
- *L'ensemble* E^A *des applications de* A *vers* $\mathbb{K}$ *, où* A *est un ensemble et* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel , est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel .*
- *Notamment l'ensemble des suites réelles* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*
- *L'ensemble de matrices* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel .*

Démonstration :

I.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 4 (Sous-espaces vectoriels)**.**
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-ev et* $F \subset E$*. On dit que* F *est un sous-espace vectoriel si et seulement si*

- $\mathbf{O_E} \in F$
- $\forall \mathbf{x} \in A, \forall \mathbf{y} \in A$ *on a* $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in A$*.*
- $\forall \mathbf{x} \in A, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *on a* $\lambda \cdot \mathbf{x} \in A$*.*

Proposition 2 (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel)**.**
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $F \subset E$*. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. F *est un sous-espace vectoriel si et seulement si*
2. $\mathbf{0_E} \in F$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \mu \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{x} \in F, \forall \mathbf{y} \in F$ *on a* $\lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{y} \in F$
3. $\mathbf{0_E} \in F$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall \mathbf{x} \in F, \forall \mathbf{y} \in F$ *on a* $\lambda \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \in F$

Il est très facile de trouver des sous ensembles qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels

Théorème 2.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et A un sous-espace vectoriel de E alors A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

Le théorème suivant est très souvent utilisé pour démontrer qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

Démonstration :
Il suffit de vérifier les 8 points.

Exemple :
- $\left\{(x,y)\in\mathbb{K}^2 / x+y=0\right\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
- Ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ayant une limite en $+\infty$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
- L'ensembles des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ convergeant vers 0 en $+\infty$est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
- Ensemble des fonctions à valeurs réelles dérivables sur un intervalle est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

Méthode : montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

Lorsque l'on étudie un sous ensemble A d'un ensemble de référence ($\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des matrices $n\times p$) dont l'on sait qu'il est un espace vectoriel et que l'on vous demande de démontrer que A est un espace vectoriel,
1. On montre que $0\in A$
2. On montre que A est stable par combinaisons linéaires (*cf* définition 4 ou proposition 2).
3. On en conclut que A est un sous-espace vectoriel .
4. On en déduit que A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

Méthode : Montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel

Pour montrer que $F\subset E$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E on peut **au choix**
- Montrer que $\mathbf{O_E}$ n'est pas dans F.
- Trouver deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ qui sont dans F mais dont la somme n'est pas dans F.
- Trouver un vecteur $\mathbf{x}$ qui est dans F et un scalaire λ tel que $\lambda\mathbf{x}$ n'est pas dans F

I.4 Opérations sur les espaces vectoriels

Dans chaque cas on muni ces ensembles des opérations naturelles.

Théorème 3 (Ensemble des applications à valeur dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel)**.**
Soit E un espace-vectoriel sur $\mathbb{K}$ et A un ensemble alors l'ensemble des applications de A dans E notée E^A ou $\mathscr{A}(A,E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 3 (Intersection de sous-espaces vectoriels)**.**
Soir E un $\mathbb{K}$-ev.

- *Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de E.*
  Alors $A \cap B$ est un sous-espace-vectoriel de E
- *Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.*
  Alors $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

Attention : Pour l'union le résultat n'est pas vrai en général, *cf* feuille de TD

II Familles de vecteurs

II.1 Bases

Définition 5 (Base, unicité de la décompositions)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\mathbf{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est ***une base*** *de E si et seulement si pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de E il existe une unique famille de scalaire $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ telle que*

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{e_1} + \cdots + \lambda_n \mathbf{e_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e_i}$$

Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les ***coordonnées*** *de $\mathbf{x}$ dans la base.*

Exemple :

Méthode pour vérifier qu'une famille donnée est une base d'un espace vectoriel E

Si on vous demande de prouver que $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}\ldots,\mathbf{u_n}$ est une base d'un espace vectoriel E.

- On commence par choisir des notations adaptées.
- On commence la réponse obligatoirement par « Soit $\square \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des scalaires » en introduisant autant de scalaires qu'il y a de vecteurs dans la famille.
- On écrit « résolvons l'équation $\lambda_1 \mathbf{u_1} + \lambda_2 \mathbf{u_2} + \cdots + \lambda_n \mathbf{u_n} = \square$
- on résout cette équation en sachant que $\square$ est un paramètre et que les inconnues sont les $\lambda_1, \ldots \lambda_n$.
- On raisonne avec des $\Leftrightarrow$ ou des si et seulement si car on résout une équation. **Très souvent l'équation doit être transformée en un système en première étape.**
- Si un problème apparaît (une infinité de solution ou pas de solution dans certains cas) on peut conclure "la famille n'est pas une base de E
- Si on arrive à résoudre le système et qu'il n'y a qu'une solution pour chaque λ_1 λ_2,$\ldots\lambda_n$ alors on peut conclure « la famille est une base de E » (et éventuellement « les coordonnées de $\square$ dans cette base sont $\lambda_1 = \ldots$, $\lambda_2 = \ldots$,$\ldots\lambda_n = \ldots$ »)
- Selon l'énoncé on peut éventuellement se contenter de montrer que le système admet une unique solution par exemple « système échelonné à coefficient diagonaux non nuls. »)

II.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille

Définition 6 (La notation Vect)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $(\mathbf{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ *une famille de vecteurs de E*
On note

$$Vect\left((\mathbf{x_i})_{[\![1,n]\!]}\right) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x_i} \text{ où } (\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \text{ est une famille de scalaire}\right\}$$

Alors $Vect\left((\mathbf{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$ *est un sous-espace vectoriel de E. On le désigne par le nom de* ***(sous)-espace vectoriel engendré*** *par la famille* $(\mathbf{x_i})_{i[\![1,n]\!]}$.

Exemple :

- Dans $\mathbb{R}^3$, Vect $((1,0,0),(0,1,0)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = 0\}$.
- Dans $\mathbb{K}[X]$, Vect$\left((X^{2n})_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left\{P(X^2) \ / \ P \in \mathbb{K}[X]\right\}$.

Remarque : l'espace vectoriel engendré par une famille n'est pas modifié si on « permute » les éléments de la famille.

II.3 Familles libres, familles génératrices et bases.

Définition 7 (Famille libre, génératrice)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\mathbf{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de E

- *On dit que $(\mathbf{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une* ***famille génératrice*** *de E si et seulement si*

$$Vect\Big((\mathbf{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]}\Big) = E$$

- *On dit que $(\mathbf{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une* ***famille libre*** *si et seulement si pour toute famille de scalaire $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.*

$$\sum_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i \cdot \mathbf{e_i} = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1,\, n]\!]\ \lambda_i = 0$$

Proposition 4 (Caractérisation d'une base)**.**
$(\mathbf{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une ***base*** *de E si et seulement si c'est une famille génératrice de E et libre.*

Proposition 5 (Opérations sur les familles)**.**
On pourra utiliser les résultats suivants pour accélérer les démonstrations

1. *Permuter les vecteurs ne change pas les propriétés (génératrice, libre) d'une famille.*
2. *Une sous-famille d'une famille libre est libre*
3. *Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.*
4. *Si une famille contient le vecteur nul ou deux fois le même vecteurs elle est liée*

Proposition 6 (Opérations sur les familles génératrices)**.**
Si $\mathscr{G} = (\mathbf{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de E, alors les opérations suivantes ne changent pas ce caractère générateur :

- *Enlever un vecteur de la famille qui est combinaison des autres vecteurs, cela s'applique toujours au vecteur nul que l'on peut enlever.*
- *Ajouter à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.*
- *Multiplier un vecteur par un scalaire* ***non nul****.*

Remarque : On peut voir que ces opérations sont analogues aux opérations autorisées lors de la méthode de résolution d'un système linéaires

Proposition 7 (Petites familles)**.**
Soit $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs d'un espace vectoriel E.

1. (u) *est libre si et seulement si* u *est non nul.*
2. (u,v) *est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, c'est à dire si aucun des vecteurs n'est proportionnel à l'autre.*

Proposition 8 (Famille de polynômes)**.**
Soit $(P_1, \ldots, P_r)$ *une famille de polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *dont les degrés sont distincts deux à deux. Alors cette famille est libre*

Définition 8 (Bases canoniques de certains $\mathbb{K}$-espace vectoriel)**.**

- *La famille* $(\mathbf{e_i})_{i\in[\![1,\,n]\!]}$ *où pour tout* $i \in [\![1,\,n]\!]$ $\mathbf{e_i}$ *est le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la* i*-ème qui vaut 1, est une base de* $\mathbb{K}^n$ *dite base canonique de* $\mathbb{K}^n$
- *La famille* $(X^i)_{i\in[\![0,\,n]\!]}$ *est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$ *dite base canonique*[1] *de* $\mathbb{K}_n[X]$.
- *On note* $(E_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,\,n]\!]\\ j\in[\![1,\,p]\!]}}$ *où* $E_{i,j}$ *est la matrice de* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en ligne* i *et en colonne* j *qui vaut 1. Cette famille est la base canonique de* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Démonstration :
Il suffit de vérifier que les familles citées sont bien des espaces vectoriels concernés

Proposition 9 (Familles liées)**.**
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $(\mathbf{x_i})_{i\in[\![1,\,n]\!]}$ *une famille de vecteurs de* E.
Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(\mathbf{x_i})_{i\in[\![1,\,n]\!]}$ *est non libre. (On dit que cette famille est* ***liée****).*

- *Il existe* $i_0 \in [\![1,\,n]\!]$ *tel que vecteur* x_{i_0} *peut s'exprimer comme une combinaison linéaire finie d'autres vecteurs de la famille* $(\mathbf{x_i})_{i\in[\![1,\,n]\!]}$.
- *Il existe* $i_0 \in [\![1,\,n]\!]$ *tel que* $x_{i_0} \in Vect\big((x_i)_{I\setminus\{i_0\}}\big)$

ceci prolonge la notion de deux vecteurs colinéaires

Attention : Cette proposition affirme que dans une famille liée **au moins un** des vecteurs de la famille peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres. Cela ne veut absolument pas dire que tous les vecteurs de la famille s'exprime comme une combinaison linéaires des autres.

1. La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ dite base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice : Montrer que $(1,0,0)$ $(1,1,0)$, $(0,0,0)$ forment une famille liée de $\mathbb{C}^3$.

Théorème 4 (Caractérisation d'une base (limite programme))**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\mathbf{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de E. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $(\mathbf{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ *est une base.*
2. $(\mathbf{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ *est génératrice et si on enlève un vecteur quelconque de la famille celle ci n'est plus génératrice.* i.e.

$$\forall i_0 \in [\![1, n]\!] \qquad (\mathbf{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}} \quad \textit{n'est pas génératrice}$$

3. $(\mathbf{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ *est libre et pour tout vecteur* $\mathbf{u}$ *la famille* $(\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}, \mathbf{u})$ *n'est plus libre*

II.4 Méthodes

Attention : Avant d'appliquer chacune des méthodes suivantes, on pourra commencer par simplifier les familles étudiées grâce aux propositions 5 et 6 et 7. De plus d'autres arguments de dimension nous permettrons d'aller plus rapidement par la suite **??**

Méthode pour montrer que F est un (sous)-espace vectoriel d'un espace vectoriel E et/ ou trouver une famille génératrice de F

Si F est donné par une formule de la forme

$$F = \left\{\text{« une expression qui dépend de } a,\ b,\ldots\text{ »} \middle/ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cdots\right\}$$

et que l'on vous demande de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E
et/ou de trouver une famille génératrice de F
Il faut "séparer" les paramètres a b,...pour écrire

$$F = \{a\square + b\nabla + \cdots / a, b \text{ réels}\} = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\square, \nabla, \ldots}_{\text{il n'y a plus ni de } a, \text{ ni de } b \text{ ni}\ldots}\right)$$

On peut alors conclure que :

- F est unsous-espace vectoriel de E
- la famille $\square$, ∇,...est une famille génératrice de F

Cette méthode peut être suivie d'une autre méthode pour trouver une base voir page 14

Méthode pour trouver le sous-espace vectoriel engendré par une famille

Si on vous demande de calculer $\mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \cdots \mathbf{u_n})$ où $\mathbf{u_1}, \cdots \mathbf{u_n}$ sont des vecteurs donnés d'un espace vectoriel E .

- On commence par choisir les notations adaptées à l'espace vectoriel.
- On commence obligatoirement la réponse par « Soient $\square$ dans E, et λ_1, λ_2 $\dots\lambda_n$ des réels cherchons à résoudre l'équation

$$\square = \lambda_1 \mathbf{u_1} + \lambda_2 \mathbf{u_2} + \cdots + \lambda_n \mathbf{u_n}$$

  »
- on résout cette équation avec des $\Leftrightarrow$ ou des si et seulement si . Les inconnues sont les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. et $\square$ un paramètre. Cette équation est souvent transformée en un système d'équations.
- Lors de la résolution de cette équation le but n'est pas temps de trouver les solutions pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mais de faire apparaître une ou des conditions de compatibilité qui conditionne l'existence de solutions.
- On conclut

$$\mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \cdots \mathbf{u_n}) = \{\square \in E / \square \text{ vérifie la condition trouvée}\}$$

- on enchaîne souvent par la méthode de la page 11 pour trouver une famille génératrice de ce sous-espace vectoriel et par la méthode de la page 14 pour en trouver une base.

Méthode pour montrer qu'une famille donnée est libre

Si on vous demande de prouver que $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \ldots, \mathbf{u_n}$ est une famille libre d'un espace vectoriel E.

- On commence par choisir des notations adaptées.
- On commence la réponse obligatoirement par « Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels »en introduisant autant de réels qu'il y a de vecteurs dans la famille.
- On écrit « résolvons l'équation $\lambda_1\mathbf{u_1} + \lambda_2\mathbf{u_2} + \cdots + \lambda_n\mathbf{u_n} = 0$
- on résout cette équation en sachant que $\square$ est un paramètre et que les inconnues sont les $\lambda_1, \ldots \lambda_n$.
- On raisonne avec des $\Leftrightarrow$ ou des si et seulement si car on résout une équation. Très souvent l'équation doit être transformée en un système en première étape.
- Si on arrive à résoudre le système et que l'unique solution pour chaque variable est $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 0, \ldots \lambda_n = 0$ alors on peut conclure « la famille est libre »
- si on trouve d'autres solutions que la solution nulle on peut conclure « la famille est liée ».

Méthode pour montrer qu'une famille donnée est liée

Si l'on vous demande de montrer qu'une famille est liée

- **À essayer en premier** On peut deviner une combinaison linéaire « évidente »entre les vecteurs donnés.
- Si on ne trouve aucune combinaison linéaire évidente on utilise la méthode générique précédente.

Méthode pour montrer qu'une famille donnée est une base de E.

Si l'on a déjà démontré qu'une famille est libre et génératrice de E il suffit d'indiquer que c'est une base de E

Méthode pour trouver une base de E.

On cherche une famille génératrice avec la méthode « pour trouver une famille génératrice d'un espace vectoriel E »e la page 11 et l'on vérifie que la famille trouvée est libre avec la méthode « Méthode pour montrer qu'une famille donnée est libre »de la page 13.

Famille de fonctions

Lorsque l'on étudie la liberté d'une famille de fonction $f_1,\ f_2,\dots,\ f_n$, on doit étudier des équations du type

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$$

Pour cela on peut au choix

- Spécifier l'équation précédente en remplaçant la variable par des valeurs bien choisies $x_1,\ x_2,\ \dots x_n$ pour obtenir un système de n équations. Cela donne une condition nécessaire sur les coefficients.
- Étudier la limite en un point bien choisi en utilisant les théorèmes de comparaisons, on doit souvent faire une récurrence .
- Se ramener à une famille de polynôme à l'aide théorème d'identification sur les polynômes.

III Espaces vectoriels de dimension finie

III.1 Définition et exemples

Définition 9 (Espace vectoriel de dimension finie)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On dit que E est ***de dimension finie*** *si et seulement si il existe une famille génératrice finie de E*

III.2 Le théorème de la dimension finie

Théorème 5 (et définition)**.**

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbf{x_1},\dots\mathbf{x_p})$ est une base de E et si $(\mathbf{y_1},\dots,\mathbf{y_m})$ est une base de E alors

$$m = p$$

i.e. *Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même cardinal.*
On dit alors que ***la dimension*** *de E est cet entier m, il est noté Dim E. Par convention*
$Dim\ \{0\} = 0$

Démonstration :

Admis

Proposition 10 (Exemples fondamentaux 1)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $Dim\,\mathbb{K}^n = n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $Dim\,\mathbb{K}_n[X] = n+1$.

Démonstration :
Il suffit d'étudier les bases canoniques

III.3 Le théorème de la base incomplète.

Proposition 11 (Base extraite)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension n. Soit $(\mathbf{f_1},\mathbf{f_2},\dots\mathbf{f_r})$ une famille génératrice.
Alors
il existe $i_1,\dots i_n$ des entiers de $[\![1, r]\!]$ tels que

$$\mathbf{f_{i_1}},\dots\mathbf{f_{i_n}} \text{ forment une base de } E.$$

Autrement dit : On peut extraire une base de toute famille génératrice.

Théorème 6 (Le théorème de la base incomplète)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$ *ev de dimension* n*.*
Soit $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots \mathbf{e_p})$ *une famille libre et* $(\mathbf{f_i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ *une famille génératrice.*
Alors
il existe $\mathbf{f_{i_1}}, \dots, \mathbf{f_{i_{n-p}}}$ *des vecteurs tels que*

$$(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p}, \mathbf{f_{i_1}}, \dots, \mathbf{f_{i_{n-p}}}) \text{ soit une base de } E$$

Exemple : 1 :
dans $\mathbb{R}^3$ on choisit $(1,0,0),(1,1,0)$ comme famille libre et $(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)$ comme famille génératrice.

Exemple : 2 :
dans $\mathbb{R}_3[X]$ on choisit $1, X$ comme famille libre et comme famille génératrice $X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-3), X(X-2)(X-3), (X-1)(X-2)(X-3)$

On utilise souvent ce théorème avec E comme famille génératrice

Plus précisément la famille génératrice utilisée est $(\mathbf{x})_{\mathbf{x} \in E}$

Corollaire 1 (Existence de base)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie non nulle.*
Alors il existe une base de E

Démonstration :
Par hypothèses il existe une famille génératrice (finie) $\mathcal{G}$ de E et un vecteur $\mathbf{x_0}$ non nul.
On applique le théorème de la base incomplète à la famille libre $\mathbf{x_0}$ et à la famille génératrice $\mathcal{G}$

III.4 Caractérisation des bases en dimension finie

***lemme* 1** (Cardinal d'une famille génératrice d'une famille libre)**.**
.
Soit E un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension n et soit* $(\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_p})$ *une famille.*
Alors

- *Si* $(\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_p})$ *est libre alors* $p \leqslant n$
- *Si* $(\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_p})$ *est génératrice alors* $p \geqslant n$

Théorème 7.

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et soit* $(x_1, \cdots, x_p)$ *une famille.*
Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes.

- $(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_p})$ *est une base de* E
- $(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_p})$ *est une famille génératrice de* E *et* $n = p$
- $(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_p})$ *est une famille libre et* $n = p$

Méthode pour montrer qu'une famille est une base.

Si on étudie un espace-vectoriel E **dont on connaît la dimension** Pour montrer que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, il suffit de

- Montrer que la famille est libre et que le cardinal de la famille est égal à la dimension de E.
- **Ou bien** Montrer que la famille est génératrice et que le cardinal de la famille est égal à la dimension de E.

III.5 Sous espaces vectoriels et rang

, ou si il n'y a pas d'ambiguité Dim E

Proposition 12 (Sous espace vectoriel en dimension finie)**.**
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie et* $A \subset E$ *un sous espace vectoriel.*
Alors : A est de dimension finie et Dim $A \leqslant$ *Dim* E
De plus Dim $A =$ *Dim* E *si et seulement si* $A = E$

Démonstration :
On utilise le théorème de la base incomplète

Exemple : dans $\mathbb{R}_2[X]$ calculer la dimension de $A = \text{Vect}\left(X^2+1, X^2+2, X^2+X\right)$.

Définition 10 (Rang d'une famille de vecteurs.)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$ de dimension finie n, soit $(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p})$ une famille alors on appelle ***le rang*** *de $(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p})$ la dimension du sous espace vectoriel*

$$Vect\left(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p}\right)$$

Cet entier naturel est noté $rg\,(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p})$, on a donc

$$rg\,(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p}) = Dim\ Vect\left(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p}\right)$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on considère la famille $(1, X,^2, 1+X)$. Calculer son rang.

Proposition 13 (Propriétés du rang)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{F} = (\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p})$ une famille alors

1. $$rg\,(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p}) \leqslant p$$

   Il y a égalité si et seulement si la famille est libre.

2. $$rg\,(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p}) \leqslant Dim\,(E)$$

   Il y a égalité si et seulement si la famille est génératrice.

IV Représentation matricielle

Remarque préliminaire : produit d'une matrice par une colonne

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ alors on constate que

$$x\begin{pmatrix} a \\ a' \\ a'' \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ b' \\ b'' \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c \\ c' \\ c'' \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix} = AX$$

Exercice 1.
Trouver une matrice A telle que pour tout x, y et z réels

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

IV.1 Matrices colonnes des coordonnées

Si on connaît une base $(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n})$ de E, alors tout vecteur est entièrement connu si on connait ses n coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$. Plutôt que de présenter les coordonnées sous forme d'une liste, on va voir qu'il est plus pratique de les manipuler sous la forme d'une matrice colonne, c'est ce que l'on nomme ...

Définition 11 (Matrice colonne des coordonnées dans une base)**.**
Soit $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \dots,\ \mathbf{e_n})$ *une base de* E*. Pour tout vecteur* $\mathbf{x} \in E$ *de coordonnées* $(x_1, x_2,\ \dots, x_n)$ *dans*

la base $\mathscr{B}$ la matrice colonne des coordonnées de **v***, notée $X_{\mathscr{B}}$ est*

$$X_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Exemple :

- Soit $\mathbb{R}^3$ munit de la base canonique et $x = (1,2,3)$ alors la matrice des coordonnées de x dans la base est
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{B}$ sa base canonique et $P = 2 - X + X^3$, alors la matrice des coordonnées est
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ munit de la base canonique $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,1}$, $E_{2,2}$ aors la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors sa représentation est
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Proposition 14 (Rang d'une famille et d'une matrice)**.**

Le rang de la famille est égale au rang de la matrice de ses coordonnées. Ce théorème permet d'utiliser les méthodes du pivot pour calculer le rang d'une famille.

IV.2 Changement de base

Matrice de passage et calcul des coordonnées d'un vecteur.

Soient $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n})$, $\mathscr{B}' = (\mathbf{f_1}, \dots, \mathbf{f_n})$ deux bases d'un espace vectoriel E et $\mathbf{v}$ un vecteur de E.
On appelle **matrice de passage** :

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \mathbf{f_1} \;\ldots\ldots\; \mathbf{f_n} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & * & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathbf{e_1} \\ \vdots \\ \mathbf{e_n} \end{array}$$

la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée du vecteur colonne des coordonnées $\mathbf{f_j}$ exprimées dans la base $\mathscr{B}$, c'est à dire $P_j = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\mathbf{f_j})$.
Cette matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$ permet de calculer les coordonnées dans $\mathscr{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathscr{B}'$:
On note $X_{\mathscr{B}}$ la matrice du vecteur $\mathbf{v}$ dans la base $\mathscr{B}$ et $X_{\mathscr{B}'}$ la matrice des coordonnées dans la base alors

Attention : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est une notation générale, dans les sujets cette notation est rarement utilisée, on introduit cette matrice à l'aide d'une phrase.

IV.3 Propriétés

Théorème 8 (Inverse d'une matrice de passage .)**.**
Soient $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n})$, $\mathscr{B}' = (\mathbf{f_1}, \dots, \mathbf{f_n})$ *deux bases d'un espace vectoriel* E *et* $\mathbf{v}$ *un vecteur de* E.

$$\begin{array}{cc} \mathbf{f_1} \ldots\ldots \mathbf{f_n} & \\ P = \begin{pmatrix} & & \\ & * & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{e_1} \\ \vdots \\ \mathbf{e_n} \end{array} \end{array}$$

La matrice P est inversible et son inverse P^{-1} est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\mathbf{e_j}$ exprimées dans la base $\mathscr{B}'$:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{e_1} \ldots\ldots \mathbf{e_n} & \\ P^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & * & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{f_1} \\ \vdots \\ \mathbf{f_n} \end{array} \end{array}$$

Ce qui permet permet de calculer les coordonnée dans la base $\mathscr{B}'$ en fonction des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

$$P^{-1}X = X'$$

Remarque : On peut noter :

$$P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

La réciproque du théorème précedent est aussi juste et beaucoup plus facile.

Proposition 15 (Matrice d'une base)**.**
Soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{F} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n})$ une famille de n vecteurs de E et $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ la matrice dont les colonnes $A_j = Mat_{\mathscr{B}}(\mathbf{v_j})$ sont les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs $\mathbf{v_j}$ dans la base $\mathscr{B}$. Alors

La matrice A est inversible si et seulement si $\mathscr{F}$ est une base de E.

Exercice 2.

Montrer que toute famille de $n+1$ polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ tels que pour tout i, $\deg(P_i) = i$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Proposition 16 (Opérations sur les matrices de passage).
Soit $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ $\mathscr{B}''$ trois bases.
Si P est la matrice de passage qui permet de calculer les coordonnée dans $\mathscr{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathscr{B}'$ et Q est la matrice de passage qui permet de calculer les coordonnée dans $\mathscr{B}'$ en fonction des coordonnées dans $\mathscr{B}''$ alors
La matrice PQ est la matrice de passage qui permet de calculer les coordonnées dans $\mathscr{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathscr{B}''$.

Cette proposition est une généralisation du théorème 8.

Exemple : Soient $\mathscr{B}' = (1, 1+X, 1+X+X^2)$ et $\mathscr{B}'' = (X(X-1), (X-1)(X+1), X(X+1))$ deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$ (le vérifier !).
Pour calculer la matrice de passage P qui permet de calculer les cordonnées d'un polynôme dans la base $\mathscr{B}''$ à partir de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$, on peut utiliser les matrices de passage entre les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ et la base canonique $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
Les matrices $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont les matrices dont les colonnes sont formées des coordonnées des polynômes de la base $\mathscr{B}'$, respectivement $\mathscr{B}''$ dans la base $\mathscr{C}$.
D'après la proposition énoncée ci dessus :

$$P = P_2^{-1} P_1.$$

On peut retrouver ce résultat en notant Z le vecteur colonne des coordonnées d'un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathscr{C}$, Z' celui de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ et Z'' celui de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}''$. On a alors

$$P_1 X' = X \text{ et } P_2 X'' = X \Longleftarrow P_2^{-1}(P_1 Z') = Z''.$$

La matrice $P_2^{-1} P_1$ est bien la matrice P recherchée.

Par le calcul on obtient $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.