DM 07

BCPST Spé 2

Réponses

OBLIGATOIRE

Un jeu vidéo comporte N phases de jeu : niveau 1, niveau 2, ... niveau N. On suppose que N est un entier au moins égal 3. Le jeu commence au niveau 1. Ensuite, il faut réussir un niveau pour passer au suivant et ainsi de suite jusqu'au dernier niveau.

Le jeu s'arrête si l'on a échoue à l'un des niveaux ou si l'on a réussi tous les niveaux.

On suppose en outre que, lorsqu'on parvient au niveau k ($k = 1,2,...,N$), la probabilité de réussir ce $k\grave{e}me$ niveau est égale $1/k$.

On désigne par X_N la variable aléatoire suivante :

"Nombre de niveaux entièrement franchis au moment où le jeu s'arrête".

Ainsi, pour $k = 1,2,...,N-1$, l'événement $(X_N = k)$ signifie que l'on a échoué au niveau $k+1$, et l'événement $(X_N = N)$ que l'on est vainqueur du jeu.

1. Démontrer que : $P(X_N = k) = \dfrac{k}{(k+1)!}$ pour $k = 1,2,...N-1$ et que : $P(X_N = N) = \dfrac{1}{N!}$

RÉPONSE:

Deux méthodes sont proposées en correction

Théorème des probabilités composées

Si on note A_k l'évènement « le niveau k est franchi ».
On a alors, pour $k < n$

$$[X_N = k] = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}$$

On utilise le **théorème des probabilitées composées**

$$P(X_N = k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \cdots P_{A_1\cap\cdot\cap A_{k-1}}(A_k)P_{A_1\cap\cdot\cap A_k}(\overline{A_{k+1}})$$

L'énoncé nous dit « lorsqu'on parvient au niveau k $(k = 1,2,...,N)$, la probabilité de réussir ce $k\grave{e}me$ niveau est égale $1/k$ ». On sait donc que $P(A_1) = \dfrac{1}{2}$, $P_{A_1}(A_2) = \dfrac{1}{2}$, $P_{A_1\cap\cdot\cap A_{k-1}}(A_k) = \dfrac{1}{k}$. De plus

$$P_{A_1\cap\cdots\cap A_k}(\overline{A_{k+1}}) = 1 - P_{A_1\cap\cdots\cap A_k}(A_{k+1}) = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$$

Donc

$$P(X_N = k) = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{k+1}$$

Ce qui montre que

$$P(X_N = k) = \frac{k}{(k+1)!}$$

Remarque : Cette formule est juste aussi pour $[X_N = 1] = A_1 \cap \overline{A_2}$ On a aussi

$$[X_N = N] = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N$$

En utilisant le théorème des probabilitées composées :

$$P(X_N = N) = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n}$$

Récurrence On a pour $k \in [\![1, N-1]\!]$, comme les épreuves s'enchainent $[X \geqslant k] \subset [X \geqslant k-1]$

$$[X \geqslant k] = [X \geqslant k-1] \cap [X \geqslant k])$$

En utilisant la probabilité conditionnelle

$$P(X \geqslant k) = P(X \geqslant k-1)P_{[X\geqslant k-1]}(X \geqslant k)$$

En lisant l'énoncé

$$P_{[X\geqslant k-1]}(X \geqslant k) = \frac{1}{k} \qquad P(X \geqslant 0) = 1$$

Il ne reste plus qu'à rédiger la récurrence

$$\boxed{\text{Pour } k = 1,2,...N-1 \text{ on a } P(X_N = k) = \frac{k}{(k+1)!} \text{ et } P(X_N = N) = \frac{1}{N!}}$$

*

2. Calculer $E(X_N + 1)$. En déduire que $E(X_N) = S_N - 1$ avec

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

Que vaut $\lim\limits_{N\to+\infty} E(X_N)$?

RÉPONSE:

Comme la variable aléatoire X_N+1 est à support fini ($[\![2, N+1]\!]$) elle admet une espérance et

$$\begin{aligned}
E(X_N+1) &= \sum_{k=2}^{N}(k+1)P(X_n=k) && \text{théorème de transfert}\\
&= \sum_{k=1}^{N-1}(k+1)\frac{k}{(k+1)!}+\frac{N+1}{N!} && \text{question précédente}\\
&= \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{(k-1)!}+\frac{N}{N!}+\frac{1}{N!} && \text{simplification factorielle}\\
&= \sum_{k=0}^{N-2}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(N-1)!}+\frac{1}{N!} && \text{changement d'indice}\\
&= S_N
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X_N+1)=S_N}$$

Or on sait que $E(X_N+1)=E(X_N)+1$, donc

$$\boxed{E(X_N)=S_N-1}$$

On reconnaît en S_N, la somme partielle de la série exponentielles, donc

$$\lim_{N\to+\infty} = \mathrm{e}$$

donc

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} E(X_N)=\mathrm{e}-1}$$

*

3. Exprimer $E[(X_N+1)(X_N-1)]$ l'aide de S_{N-3}.

   En déduire $V(X_N)$ en fonction de S_N,S_{N-3} et N.
   Montrer que $\lim_{N\to+\infty} V(X_N)=3e-e^2$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
E[(X_N+1)(X_N-1)] &= \sum_{k=1}^{N}(k-1)(k+1)P(X_N=k) && \text{théorème de transfert}\\
&= \sum_{k=1}^{N-1}(k-1)(k+1)\frac{k}{(k+1)!}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!} && \text{question 1}\\
&= \sum_{k=2}^{N-1}(k-1)(k+1)\frac{k}{(k+1)!}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!}\\
&= \sum_{k=2}^{N-1}\frac{1}{(k-2)!}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!} && \text{propriétés factorielle}\\
&= \sum_{k=1}^{N-3}\frac{1}{k!}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!} && \text{changement d'indice}\\
&= S_{N-3}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E[(X_N+1)(X_N-1)]=S_{N-3}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!}}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
E[(X_N+1)(X_N-1)] &= E(X_N^2-1)\\
&= E(X_n^2)-1
\end{aligned}$$

Donc

$$E(X_n^2)=1+S_{N-3}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!}$$

En utilisant la formule de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned}
V(X_N) &= E(X_N^2)-E(X_N)^2\\
&= 1+S_{N-3}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!}-(S_N-1)^2 && \text{questio ns précédentes}\\
&= S_{N-3}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!}-S_N^2+2S_N
\end{aligned}$$

$$\boxed{V(X_N)=S_{N-3}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!}-S_N^2+2S_N}$$

On a comme dans la question précédente

$$\lim_{N\to+\infty} S_{N-3}=\mathrm{e} \qquad \lim_{N\to+\infty} S_N=\mathrm{e} \qquad \lim_{N\to+\infty} S_N^2=\mathrm{e}^2$$

De plus pour $N\in\mathbb{N}^*$, $N-1\leqslant N$ donc

$$0\leqslant\frac{(N-1)(N+1)}{N!}\leqslant\frac{N(N+1)}{N!}$$

Puis

$$0 \leqslant \frac{(N-1)(N+1)}{N!} \leqslant \frac{(N+1)}{(N-1)!}$$

et finalement

$$0 \leqslant \frac{(N-1)(N+1)}{N!} \leqslant \frac{(N-1)}{(N-1)!} + \frac{1}{(N-1)!}$$

et

$$0 \leqslant \frac{(N-1)(N+1)}{N!} \leqslant \frac{1}{(N-2)!} + \frac{1}{(N-1)!}$$

Comme $\lim_{N\to+\infty} N! = +\infty$, et en utilisant le théorème des encadrements

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{(N-1)(N+1)}{N!} = 0$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} V(X_N) = 3e - e^2.}$$

*

4.

```
import numpy.random as rd


def jeux(N):
        nf=0
        while (rd.random()<1/(nf+1))and (nf<=N):
                nf=nf+1
        return nf


N=10**7
nbexp=10^5 # un grand nombre d'expériences
m=0
for i in range(nbexp)
        m=m+jeux(n)

print(m/1000000)
```

FACULTATIF

On étudie une méthode de détection des porteurs d'un parasite au sein d'un ensemble donné de N individus tirés au sort. La probabilité d'être porteur du parasite dans la population est p avec $0 < p < 1$. Les personnes sont atteintes indépendemment les unes des autres.

On dispose d'un test permettant d'établir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le parasite, le résultat de ce test étant dit positif dans le premier cas et négatif dans le second.

Pour chacun des N individus, on possède un prélèvement sanguin. On envisage alors deux méthodes de détection.

- Première méthode : on teste un à un les N prélèvements, effectuant ainsi N tests.
- Seconde méthode (poolage) :
  - On fixe un entier naturel non nul l. On suppose que N est un multiple de l et on pose $N = n.l$. On répartit les N prélèvements en n groupes $G_1, G_2, \ldots, G_n$, chaque groupe $G_i$contenant l prélèvements. Pour chacun des groupes G_i, on extrait une quantité de sang de chacun des l prélèvements qu'il contient, puis on mélange ces extraits, obtenant ainsi un échantillon de sang H_i, caractéristique du groupe G_i.
  - On teste alors H_i

    - si le test de $H_i$est négatif, aucun des individus au sein du groupe G_i n'est porteur du parasite. Le travail sur le groupe G_i est alors terminé ;

    - si le test de $H_i$est positif, on teste un à un les prélèvements de G_i pour détecter les porteurs du parasite au sein du groupe G_i.

Soient X la variable aléatoire égale au nombre de groupes G_i pour lesquels le test de H_i a été positif et T la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués dans la réalisation de la méthode du poolage.

(a) Exprimer T à l'aide de n, l et X.

<u>RÉPONSE:</u>

Dans la méthode du poolage, on effectue

- Toujours les n tests nécessaires pour tester tous les groupes.
- Pour chaque groupe positif on effectue l tests, donc la deuxième phase comporte lX tests car X représente le nombre de groupe positifs.

Au total

$$\boxed{\text{Le nombre de tests effectués dans la méthode du poolage est } T = n + lX}$$

*

(b) Pour tout nombre entier naturel i compris entre 1 et n, calculer la probabilité de l'événement : "le test de H_i est négatif"

RÉPONSE:

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
Le test H_i est négatif si et seulement si tous les échantillons composant ce groupe sont négatifs. Si on note pour $k \in [\![1, l]\!]$ l'évènement A_k" l'échantillon k (de ce groupe) est positif", on cherche à calculer

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{l} \overline{A_k}\right) &= \prod_{k=1}^{l} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right) && \text{indépendance des contaminations}\\ &= \prod_{k=1}^{l} (1-p)\\ &= (1-p)^l\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité de l'événement " le test } H_i \text{ est négatif est de } (1-p)^l}$$

*

(c) Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de X.

RÉPONSE:

X est le nombre de "succès" d'une expérience de Bernouilli "le groupe est testé positif". Il y a n groupes indépendants [1] et la probabilité qu'un groupe soit testé positif est d'après la question précédente $1-(1-p)^l$

$$\boxed{X \text{ suit la loi } \mathscr{B}(n, 1-(1-p)^l),\ E(X) = n\left(1-(1-p)^l\right)}$$

*

(d) Déterminer enfin l'espérance de T et préciser sous quelles conditions cette seconde méthode est la plus avantageuse.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}E(T) &= E(n+lX) && \text{première question}\\ &= n + lE(X) && \text{linéarité de l'espérance}\\ &= n + ln\left(1-(1-p)^l\right) && \text{question précédente}\end{aligned}$$

$$\boxed{E(T) = n + ln\left(1-(1-p)^l\right)}$$

Cette méthode est plus avantageuse si le nombre de test effectués est en moyenne plus faible que le nombre de tests effectué dans la procédure de base qui est nl

$$\begin{aligned}n + ln\left(1-(1-p)^l\right) < nl &\Leftrightarrow ln\left(1-(1-p)^l\right) < nl - n\\ &\Leftrightarrow l\left(1-(1-p)^l\right) < l-1 && n \text{ est positif}\\ &\Leftrightarrow 1-(1-p)^l < 1-\frac{1}{l} && l \text{ est positif}\\ &\Leftrightarrow (1-p)^l > \frac{1}{l}\\ &\Leftrightarrow 1-p > \frac{1}{l^{1/l}}\\ &\Leftrightarrow p < 1-\frac{1}{l^{1/l}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La condition est } p < 1-\frac{1}{l^{1/l}}}$$

*

1. c'est une conséquence du lemme des coalitions