DM 08

BCPST Spé 2

à rendre le mercredi 29 novembre

On considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geq 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel x ,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

- Calculer T_2 et T_3 .
- (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , T_n est un polynôme de degré n dont on déterminera le coefficient du terme de degré n .
(b) Etablir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).
- Calculer, pour tout entier naturel n , $T_n(1)$ en fonction de n .
- (a) Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0; \pi[$:

$$T_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $] -1; 1[$, que l'on explicitera.

(c) Établir, pour tout entier naturel non nul n : $T_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$.

(d) En déduire, pour tout entier naturel non nul n , la valeur de $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n .

5. Facultatif

(a) Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0; \pi[$:

$$\sin^2 \theta T_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta T_n'(\cos \theta) + (n^2 + 2n) T_n(\cos \theta) = 0.$$

Indication : On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) :

$$\theta \mapsto \sin \theta T_n(\cos \theta) - \sin(n+1)\theta.$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel n :

$$(X^2 - 1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2 + 2n)T_n = 0$$