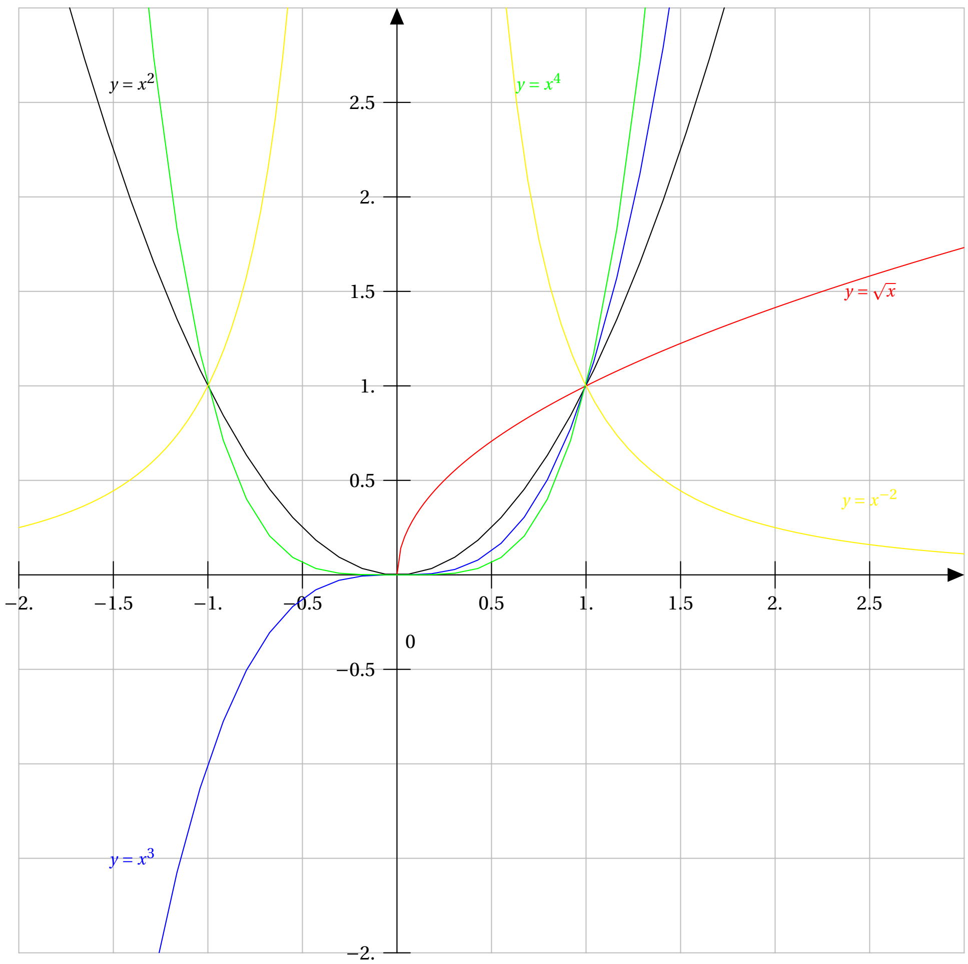
Nom :

Interrogation de mathématiques BCPST spé 2
Mercredi 6 septembre 2023
durée 30 minutes

Consignes : les réponses et les éventuels calculs doivent figurer sur ce document, n'oubliez pas d'indiquer votre nom.

1. Sur le graphe suivant tracer les courbes des fonctions suivantes.
   (a) $x \longmapsto x^3$
   (b) $x \longmapsto x^4$
   (c) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$
   (d) $x \longmapsto \sqrt{x}$



2. Donner les développements limités à l'ordre 3, en 0 des fonctions suivantes

- $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

- $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$

- $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$

3. Compléter les formules suivantes, a et b sont des réels tels que les quantités soient bien définies
   - $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$
   - $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
   - $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

4. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, sur l'ensemble indiqué
   (a) $f : x\mapsto \ln(e^{2x}+e^x)$ sur $\mathbb{R}$

RÉPONSE:

Une exponentielle étant toujours strictement positive, on peut vérifier par opération que la fonction est de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2e^{2x}+e^x\right)\ln'\left(e^{2x}+e^x\right) \\ &= \frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+e^x} \\ &= \frac{2e^x+1}{e^x+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel, } f'(x)=\frac{2e^x+1}{e^x+1}}$$

*

   (b) $g : x\mapsto \cos(\sin(x))$ sur $\mathbb{R}$

RÉPONSE:

La composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$ est classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$.
Soit x réel

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sin'(x)\cos'(\sin(x)) \\ &= -\cos(x)\sin(\sin(x)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel } g'(x)=-\cos(x)\sin(\sin(x))}$$

*

(c) $h : x \mapsto \sqrt{\sqrt{x}-2}$ sur $]4; +\infty[$

RÉPONSE:

La fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \sqrt{4}-2$ est de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $]4; +\infty[$ et **à valeurs strictement positives**, donc h est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $]4; +\infty[$

Soit x dans cet ensemble

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sqrt{x}-2}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}-2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \in]4; +\infty[,\ h'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}-2}}}$$

*

5. Calculer les limites suivante

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x}$

RÉPONSE:

On a pour x proche de 0

$$e^x - 1 \sim x$$

Par quotient

$$\frac{e^x-1}{2x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x}{x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}}$$

*

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + \ln x + \sqrt{x}}{x + x^2 - x\ln(x)}$

RÉPONSE:

Pour x au voisinage de $+\infty$

$$\frac{e^x + \ln x + \sqrt{x}}{x + x^2 - x\ln(x)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1 + \frac{\ln x}{e^x} + \frac{\sqrt{x}}{e^x}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}}$$

D'après le théorème des croissances comparées

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

et on obtient donc

$$\frac{e^x + \ln x + \sqrt{x}}{x + x^2 - x\ln(x)} \sim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

En utilisant le théorème des croissances comparées

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\ln x+\sqrt{x}}{x+x^2-x\ln(x)}=0}$$

*

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{\tan 2x}$

RÉPONSE:

Soit x au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{4+x}-2}{\tan 2x} &= \frac{2\left(\sqrt{1+\frac{x}{4}}-1\right)}{\tan(2x)}\\ &\sim_{x\to+\infty} 2\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{4}}{2x} \qquad \text{cours} \qquad \tan u\sim_0 u \qquad \sqrt{1+u}-1\sim_0\frac{u}{2}\\ &\sim_{x\to+\infty} -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{\tan 2x}=\frac{1}{8}}$$

*

6. Simplifier les expression suivantes

(a) Soit $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{2^{n-2}2^{3/2}}{(2^n)^n\sqrt{2}}=$

RÉPONSE:

Soit $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{2^{n-2}2^{3/2}}{(2^n)^n\sqrt{2}} &= \frac{2^{n-2+\frac{3}{2}}}{2^{n^2}2^{\frac{1}{2}}}\\ &= 2^{n-2+\frac{3}{2}-n^2-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } n\in\mathbb{N},\ \frac{2^{n-2}2^{3/2}}{(2^n)^n\sqrt{2}}=2^{-n^2+n-1}}$$

*

(b) $\dfrac{\ln(32)-\ln(4)}{\ln(16)}=$

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}\frac{\ln(32)-\ln(4)}{\ln(16)} &= \frac{\ln\left(2^5\right)-\ln\left(2^2\right)}{\ln\left(2^4\right)}\\ &= \frac{5\ln(2)-2\ln(2)}{4\ln(2)}\\ &= \frac{5-2}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\ln(32)-\ln(4)}{\ln(16)} = \frac{3}{4}}$$

*

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{(e^x)^2 - \left(e^2\right)^x}{e^{x^2}} =$

RÉPONSE:

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\left(e^x\right)^2 - \left(e^2\right)^x = e^{2x} - e^{2x} = 0$$

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathbb{R},\ \frac{(e^x)^2 - \left(e^2\right)^x}{e^{x^2}} = 0}$$

*