Applications linéaires

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Décembre 2023

Table des matières

I Applications linéaires **2**

I.1 Définitions 2

I.2 Structure de $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{L}(E,F)$ 4

I.3 Noyaux et images 5

II Dimension finie **7**

II.1 Image d'une base 8

II.2 Rang d'une application linéaire 9

III Matrice **10**

III.1 Matrice d'une application linéaire 10

III.1.a Définition 10

III.1.b Liens entre les opérations sur les matrices et les opérations sur les applications linéaires 13

III.2 Liens entre les propriétés des applications linéaires et celle des matrices les représentants 14

III.3 Changement de base 14

III.3.a Rappel Pour un vecteur 14

III.3.b Pour un endomorphisme 15

Dans tout ce cours $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E, F désignent des espaces-vectoriels sur $\mathbb{K}$.

I Applications linéaires

I.1 Définitions

Définition 1 (Application linéaire)**.**
Soit E et F deux espaces vectoriels et f une application de E vers F.
Alors on dit que f est une ***application linéaire*** *si et seulement si*

$$\forall \mathbf{u} \in E,\ \forall \mathbf{v} \in E,\ \forall \mu \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad f(\lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{v}) =$$

Notations
On dit aussi que f est un **(homo)morphisme** d'espace vectoriel.
L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.

Exemple :

- La fonction définie sur $\mathbb{K}^2$ par $s(x, y) = (x + y, x - y)$ est une application linéaire.
- L'application
$$\begin{array}{rccl} \varphi_1 : & \mathbb{R}^3 & \to & R^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x + y, x + z, z + y) \end{array}$$
est une application linéaire.
- La dérivation dans $\mathbb{K}[X]$:
$$\begin{array}{rccl} \Delta : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array} \quad \text{est une application linéaire.}$$
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$
$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathscr{C}^\infty(I) & \to & \mathscr{C}^\infty(I) \\ & \varphi & \mapsto & \varphi' \end{array} \quad \text{est une application linéaire.}$$
- L'application φ de $\mathbb{K}^2$ dans lui même définie par $\varphi(x, y) \mapsto (x^2, -y)$ n'est pas linéaire.
- La transposition de matrice est une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui même.

Proposition 1 (Autres caractérisations de la linéarité)**.**
Soit f une application d'un espace-vectoriel E dans un espace-vectoriel F. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes

1. *f est linéaire*
2. *(* un seul scalaire*)*
$$\forall \mathbf{u} \in E, \forall \mathbf{v} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad f(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}) =$$
3. *(* + et . traités séparément *)*
$$\forall \mathbf{u} \in E, \forall \mathbf{v} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \qquad \textit{et} \qquad f(\lambda \mathbf{u}) =$$

Proposition 2 (Premières propriétés)**.**
Soit E et F deux espaces vectoriels alors :

- $f \in \mathscr{L}(E,F)$ *alors* $f(\mathbf{0_E}) =$.
- *Si* $f \in \mathscr{L}(E,F)$ *et si* $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \ldots, \mathbf{u_n}$ *sont des vecteurs et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sont des scalaires :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mathbf{u_i}\right) = \qquad .$$

Définition 2 (Applications linéaires particulières)**.**

- *Un* ***endomorphisme*** *est une application linéaire de E dans lui même.*
  L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$
- *Un* ***isomorphisme*** *est une application linéaire bijective.*
- *Un* ***automorphisme*** *de E est un endomorphisme bijectif de E. L'ensemble des automorphismes de E est est noté* $GL(E)$.

Définition 3 (Composées itérées d'un endomorphisme)**.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ *et n un entier naturel . On note*

$$f^n = \begin{cases} id_E & si\ n = 0 \\ \underbrace{f \circ f \circ f \cdots \circ f}_{n\ fois} & sinon \end{cases}$$

On a de façon équivalente

$$f^n = \begin{cases} id_E & si\ n = 0 \\ f \circ f^{n-1} & sinon \end{cases}$$

Méthode linéarité d'une application

Si on vous demande de prouver qu'une application f $E \mapsto F$ est linéaire et si l'on sait déjà que E et F sont des espaces vectoriels.

1. Il faut commencer par bien choisir les variables utilisées.

   Par exemple si on manipule des polynômes, on choisira comme vecteurs P et Q. Si on manipule des vecteurs de $\mathbb{K}^2$, $\mathbf{u} = (x, y)$ et $\mathbf{v} = (x', y')$. Dans $\mathbb{K}^3$ $\mathbf{u} = (x, y, z)$ et $\mathbf{v} = (x', y', z')$. Si l'énoncé propose des notations, on essaye de les respecter.

2. On vérifie **l'une des deux** caractérisations de la proposition 1.

3. On commence par écrire,en remplaçant ∇ et $\square$ par les bonnes notations : « Soit ∇ dans …et $\square$ dans …et λ un réel

$$\begin{aligned}
f(\lambda\square+\square) &= && \text{on calcule } \lambda\square+\nabla\\
&= && \text{on utilise la définition de } f \text{ donnée dans l'énoncé}\\
&= && \text{on fait des simplifications}\\
&\vdots\\
&= \lambda f(\square)+f(\nabla) && \text{sans tricher! et en utilisant la définition de } f
\end{aligned}$$

Méthode NON linéarité d'une application

Si on vous demande de prouver qu'une application **n'** est **pas** linéaire.

1. On commence par calculer $f(0)$, en utilisant bien le vecteur nul de l'espace vectoriel de départ. Si on a de la chance on constate que $f(0) \neq 0$ et on peut conclure que f n'est pas linéaire.

2. Si $f(0) = 0$ il faut continuer et chercher un contre-exemple à la linéarité

   - Soit trouver un scalaire λ et un vecteur $\square$ tels que $f(\lambda\square) \neq \lambda f(\square)$. On cherche souvent des contre-exemples simples, on commence pas essayer avec $\lambda = -1$,
   - Soit trouver deux vecteurs $\square$ et ∇ tels que $f(\square+\nabla) \neq f(\square)+f(\nabla)$. On cherche souvent des contre-exemples simples.

   Une fois le contre-exemple trouvé (il peut déjà être donné indirectement dans les questions précédentes!) on peut conclure que f n'est pas linéaire.

I.2 Structure de $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{L}(E, F)$

Proposition 3.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels, alors

$$\mathscr{L}(E,\ F) \text{ est un } \mathbb{K} \text{ espace vectoriel.}$$

Démonstration :

Proposition 4 (Composition)**.**
Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$ espaces-vectoriels.
Soit f une application linéaire de E vers F et g une application linéaire de F vers G, alors : $\circ$ *est une application linéaire de* *vers*

Démonstration :

Proposition 5 (Bijection réciproque)**.**
Soit f un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est une application linéaire de F dans E.

Démonstration :

I.3 Noyaux et images

Définition 4 (Noyau et image)**.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- *On appelle* ***noyau*** *de f et on note Ker (f), l'ensemble défini par*

$$Ker\,(f) = \left\{\mathbf{v} \in E \;/\; f(\mathbf{v}) = \mathbf{0_F}\right\}$$

(Ker pour kern *ou* kernel*)*

- *On appelle* ***image*** *de f et on note Im f, l'ensemble défini par*

$$Im\, f = \left\{\mathbf{w} \in F \;/\; \exists \mathbf{v} \in E\,, f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\right\}.$$

Proposition 6 (structure du noyau et de l'image)**.**
Soit $f : E \to F$ une application linéaire, alors Ker (f) est un sous-espace vectoriel de et Im f est un sous-espace vectoriel de .

Démonstration :

Exemple :

- L'ensemble des applications définies et dérivables sur un intervalle I qui vérifient

$$\forall x \in I \quad f'(x) + x \cdot f(x) = 0$$

est le noyau de

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathscr{C}^1(I) & \to & \mathscr{C}^0(I) \\ & f & \mapsto & (x \mapsto x f(x) + f'(x)) \end{array}$$

Méthode (plus rare) pour montrer que F est un (sous)-espace vectoriel d'un espace vectoriel E

1. Si F est donné directement sous la forme d'un noyau $F = \text{Ker}\ \varphi$ et que l'on a montré précédemment que φ vous pouvez conclure par « F étant le noyau d'une application linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de E donc un espace vectoriel ».
2. Si F est donné par une écriture de la forme $F = \{\square \in / \cdots = 0\}$ on peut prendre l'initiative d'essayer de trouver une application linéaire φ telle que $F = \text{Ker}\ \varphi$

Méthode de rédaction pour le calcul du noyau de φ

Si on sait que φ est une application linéaire d'un espace vectoriel E dan un autre espace vectoriel.

- On commence par bien choisir les bonnes notations.
- Le début de la rédaction commence **obligatoirement par** « Soit $\square \in E$, $\square \in \operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si $\varphi(\square) = 0$ »
- On remplace alors φ par la définition donnée dans l'énoncé
- On raisonne avec des si et seulement si ou des $\Leftrightarrow$ en résolvant l'équation apparu au point précédent jusqu'à obtenir la forme la plus simple possible.

Exercice 1.
Calculer les noyaux et les images des applications suivantes

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}=^3[X] \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, x+z, 0) \end{array} \qquad f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x+y-z \end{array}$$

Proposition 7 (Lien entre noyau et injectivité, Image et surjectivité)**.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$

$$f \text{ est injective si et seulement si } Ker(f) = \{0_E\}.$$

$$f \text{ est surjective si et seulement si } Im(f) = F.$$

Démonstration :

II Dimension finie

Dans cette partie sauf indication contraire, les espaces vectoriels sont de dimension finie.

II.1 Image d'une base

Théorème 1 (Famille génératrice de l'image)**.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E de dimension finie. Soit $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_p})$ une base de E. Alors

$$Im\ f = Vect\big(f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), \dots, f(\mathbf{e_p})\big)$$

L'image d'une base par une application linéaire est une famille génératrice de l'image.

Démonstration :

Exemple : Calculons Im f où $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array}$

Proposition 8.
Soit f un isomorphisme de E vers F où E est un espace vectoriel de dimension finie, alors F est aussi de dimension finie et $Dim\ F = Dim\ E$.

Théorème 2 (Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base)**.**
Soir E de dimension finie. Soit $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_p})$ une base de E. Soit $(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \dots, \mathbf{f_p})$ une famille de F. Il existe une et une seule application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad f(\mathbf{e_i}) = \mathbf{f_i}$$

Démonstration :

Exemple : Quelle est l'unique endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ tel que $f(1) = 0$, $f(X) = 2$ et $f(X^2) = X$

Théorème 3 ($\mathbb{K}^n$)**.**
Si E est un espace vectoriel de dimension n alors il existe un isomorphisme de E vers $\mathbb{K}^n$. On dit alors que E et K^n sont ***isomorphes.***

Démonstration :

II.2 Rang d'une application linéaire

Définition 5 (Rang d'une application linéaire)**.**
On appelle rang d'une application linéaire f et on note $rg(f)$ la dimension de l'image de f.

$$rg(f) = Dim\ Im\ f$$

Théorème 4 (Le théorème du rang)**.**
Soit $f : E \to F$ une application linéaire où E est un espace vectoriel de dimension finie.
On a alors :

$$dim(Im\ f) + dim(Ker\ f) = dim(E).$$

Exemple :
Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y - z, -x + z, x - y)$, alors $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$ donc $\dim(\mathrm{Im}\ f) = 2$.

Théorème 5 (Injectivité et surjectivité)**.**
Soit f $E \to F$ une application linéaire, où E et F sont des espaces vectoriels de ***même dimension finie****.*
Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes

1. *f est injective.*
2. *f est surjective.*
3. *f est bijective.*

Méthode pour montrer qu'un endomorphisme est bijectif

Si f est **un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie** E et si on doit montrer que f est un automorphisme (*i.e.* bijective). Il suffit

- De vérifier que f est injective (par exemple en étudiant $\operatorname{Ker} f$) et de rappeler que E est de dimension finie.
- **Ou bien**De vérifier que f est surjective (par exemple en étudiant $\operatorname{Im} f$) et de rappeler que E est de dimension finie.

III Matrice

III.1 Matrice d'une application linéaire

III.1.a Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_p})$ une base de E et $\mathscr{B}' = (\mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_n})$ une base de F.
Pour tout vecteur $\mathbf{v} = x_1 \cdot \mathbf{e_1} + \cdots + x_p \cdot \mathbf{e_p}$ (les x_i sont les coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$), on a :

$$f(\mathbf{v}) =$$

où les y_i sont les coordonnées de $f(\mathbf{v})$ dans la base $\mathscr{B}'$.
Si on écrit les coordonnées des vecteurs en colonnes, cette égalité s'écrit :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{f_1} \\ \vdots \\ \mathbf{f_n} \end{array} = \qquad\qquad \begin{array}{c} \mathbf{f_1} \\ \vdots \\ \mathbf{f_n} \end{array}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Les coordonnées des vecteurs $f(\mathbf{e_i})$ suffisent donc à calculer l'image $f(\mathbf{v})$ de tout vecteurs $\mathbf{v}$ dont on connaît les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$:

Proposition 9 (Écriture matricielle d'une application linéaire)**.**
Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_p})$ une base de E, $\mathscr{B}' = (\mathbf{f_1}, \cdots, \mathbf{f_n})$ une base de F et $f : E \to F$ une application linéaire.
Si on note

- *$X_{\mathscr{B}}$ la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\mathbf{v}$ dans la base $\mathscr{B}$*
- *$Y_{\mathscr{B}'}$ la matrice colonne des coordonnées de l'image $f(\mathbf{v})$ dans la base $\mathscr{B}'$,*

alors on a la relation :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{array}{cc} f(\mathbf{e_1}) \dots f(\mathbf{e_p}) & \\ \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{f_1} \\ \vdots \\ \mathbf{f_n} \end{array} \end{array}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X}$$

où la matrice à n lignes et p colonnes $A = (A_1, \cdots, A_p)$ est la matrice où les colonnes A_j sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ des vecteurs $f(\mathbf{e_j})$).
La matrice A s'appelle la ***matrice de l'application linéaire*** *f de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$, on la note*

$$A = Mat_{\mathscr{B}', \mathscr{B}}(f).$$

Ce que l'on peut représenter de la manière suivante

$$E \xrightarrow{\quad f \quad} F$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbf{x} \arrow[r, mapsto, "\text{calcul direct}"'] \arrow[d, "\begin{array}{l}\text{calcul des coordonnées de}\\ \text{x dans la base } \mathscr{B}\\ \mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{e_1} + \cdots + x_p \cdot \mathbf{e_p}\end{array}"'] & \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \\
X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto, "\text{multiplication par A}"] & Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \arrow[u, "\begin{array}{l}\text{calcul de } \mathbf{y} \text{ à l'aide des co-}\\ \text{ordonnées dans la base } \mathscr{C}\\ \mathbf{y} = y_1 \cdot \mathbf{f_1} + \cdots + y_n \cdot \mathbf{f_n}\end{array}"'] \\
\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \arrow[r, "X \mapsto AX"'] & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})
\end{tikzcd}$$

Méthode pour donner la matrice d'une application linéaire.

$$\begin{array}{cc}
f(\mathbf{e_1}) \dots f(\mathbf{e_p}) & \\
\left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right) & \begin{array}{c} \mathbf{f_1} \\ \vdots \\ \mathbf{f_n} \end{array}
\end{array}$$

Remarque :

Si $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$ et on dit matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Attention : Cette notation apparaît dans le programme contrairement à $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$, aucune notation n'est donnée pour le cas général. Dans les problèmes, on introduit dans la majorité des cas la matrice avec une phrase et la notation n'est pas utilisée.

Exercice 2.
Soit $\mathrm{id}_E : E \to E$ l'application identité et $\mathscr{B}$ une base de E montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = I$ où I désigne la matrice identité. c

Attention : il faut que la base de départ et la base d'arrivée soient les mêmes !

Exercice 3.
Calculer les matrices des applications linéaires suivantes

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x - y + z, x - z)$. On prend pour $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et pour $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. $\Delta : \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}_2[X]$ l'application dérivée.
   On prend pour $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$ et pour $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

III.1.b Liens entre les opérations sur les matrices et les opérations sur les applications linéaires

Proposition 10 (Somme de matrice et applications linéaires)**.**
Soit $f, g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F.
On note $A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $B = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$ leurs matrices associés et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :

- $A + B = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\qquad\qquad\qquad)$.
- $\qquad\qquad\qquad = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\lambda f)$.

Attention : Il faut prendre la même base de départ et la même base d'arrivée pour représenter f et g.

Exercice 4.
Soit f l'application linéaire définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$, écrire la matrice de $f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ et $2f$ dans la base cannonique.

Proposition 11 (Composition d'applications linéaires)**.**
Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications linéaires entres les espaces vectoriels E, F et G.
Alors $g \circ f$ est une .

Théorème 6 (Composition et produit de matrices)**.**
Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications linéaires et $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ des bases respectives des espaces vectoriels de dimension finie E, F et G.
Si $A = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)$ et $B = Mat_{\mathscr{D},\mathscr{C}}(g)$ alors

$$Mat_{\mathscr{D},\mathscr{C}}(g)\, Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f) = Mat_{\mathscr{D},\mathscr{B}}(g \circ f).$$

Attention : Il faut bien faire attention aux bases utilisées pour écrire les matrices.

Proposition 12 (matrice d'une application linéaire bijective)**.**
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. La matrice de f est notée

$$A = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f).$$

Alors
A est inversible si et seulement si f est bijective.
Dans ce cas là

$$A^{-1} = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f^{-1}).$$

Attention : Il faut bien faire attention que lorsque l'on passe de la matrice de f à celle de f^{-1} les bases de départ et d'arrivée sont inversées.

III.2 Liens entre les propriétés des applications linéaires et celle des matrices les représentants

Définition 6.
Noyau et image d'une matrice Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

par définition

$$Ker\ A = Ker\ \varphi_A \qquad Im\ A = Im\ f_A$$

C'est à dire

$Ker\ A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) / \qquad \}$ $\qquad Im\ A = \{Y \in \qquad /$ *il existe* $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *tel que* $\qquad \}$

Proposition 13 (Structure de sous-espace vectoriel)**.**
Ker A es un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et Im A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple : Soit f la fonction $\mathbb{K}_2[X]$ dans lui même telle que $f(P) = XP'$. Utilisons la matrice dans la base canonique pour calculer l'image et le noyau.

Remarque : La notion de rang d'une matrice M vu l'année dernière correspond à la dimension de Im M

Proposition 14 (Rang d'une application/ matrice)**.**
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et M la matrice représentant f dans des bases quelconques alors

$$rg(f) = rg(M)$$

III.3 Changement de base

III.3.a Rappel Pour un vecteur

On reprend les notations de la partie représentation matricielle" du chapitre précédent.

Matrice de passage et calcul des coordonnées d'un vecteur.

Soient $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n})$, $\mathscr{B}' = (\mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_n})$ deux bases d'un espace vectoriel E et $\mathbf{v}$ un vecteur de E.
On appelle **matrice de passage** :

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \mathbf{f_1} \ \ldots\ldots \ \mathbf{f_n} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & * & \\ & & \end{array} \right) & \begin{array}{c} \mathbf{e_1} \\ \vdots \\ \mathbf{e_n} \end{array} \end{array}$$

la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée du vecteur colonne des coordonnées $\mathbf{f_j}$ exprimées dans la base $\mathscr{B}$,
Cette matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$ permet de calculer les coordonnées dans $\mathscr{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathscr{B}'$:
Si on note X la matrice des coordonnées d'un vecteur $\mathbf{u}$ dans $\mathscr{B}$ et X' celle dans $\mathscr{B}'$ alors

$$X = PX'$$

Remarque : On remarque que c'est la matrice de l'application identité de E avec comme base de départ $\mathscr{B}'$ et comme base d'arrivée $\mathscr{B}$

III.3.b Pour un endomorphisme

Théorème 7 (Formule du changement de base pour une application linéaire de E dans E)**.**
Soient $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire, $\mathscr{B}$ « l'ancienne » base de E et $\mathscr{B}'$ sa « nouvelle » base,

$$Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f) = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id_E)\, Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)\, Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(id_E). \tag{E.1}$$

où id_E désigne l'application identité.

Si on note $A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$, $A' = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(g)$, alors

- *La matrice $P = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(id_E)$ est la matrice de passage qui permet de calculer les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ à partir des coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$.*
- *La matrice P est inversible , son inverse est $P^{-1} = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id_E)$.*
- *L'égalité (E.1) peut s'écrire sous la forme*
$$A' = P^{-1}AP.$$

Formule du changement de base La formule à retenir

En reprenant les notations précédentes

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

Ce qui justifie le nom de la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ qui permet de passer de la matrice de f dans $\mathscr{B}$ à celle dans $\mathscr{B}'$.

$$E \xrightarrow{\quad f \quad} E$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{x} & \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) & \\
\begin{array}{l}\text{coordonnées}\\ \text{de } \mathbf{x} \text{ dans } \mathscr{B}'\end{array} & X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \arrow[r, "\text{Multi. par } A'"] \arrow[d, "\text{Multi. par } P"'] & Y' = A'X' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} & \begin{array}{l}\text{coordonnées}\\ \text{de } \mathbf{y} \text{ dans } \mathscr{B}'\end{array} \\
\begin{array}{l}\text{coordonnées}\\ \text{de } \mathbf{x} \text{ dans } \mathscr{B}\end{array} & X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \arrow[r, "\text{Multi. par } A"'] & Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \arrow[u, "\text{Multi. par } P^{-1}"'] & \begin{array}{l}\text{coordonnées}\\ \text{de } \mathbf{y} \text{ dans } \mathscr{B}\end{array}
\end{tikzcd}$$

Pour résumer :

$$\boxed{\underbrace{Y'}_{\text{coordonnées de } f(\mathbf{x}) \text{ dans } \mathscr{B}'} = \underbrace{P^{-1}\overbrace{A\underbrace{P\underbrace{X'}_{\text{coordonnées de } \mathbf{x} \text{ dans } \mathscr{B}'}}_{\text{coordonnées de } \mathbf{x} \text{ dans } \mathscr{B}}}^{\text{coordonnées de } f(\mathbf{x}) \text{ dans } \mathscr{B}}}_{\text{coordonnées de } f(\mathbf{x}) \text{ dans } \mathscr{B}'}}$$

Définition 7 (Matrices semblables)**.**
Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (donc carrées) on dit que A et B sont ***semblables*** *si et seulement si il existe une matrice P inversible telle que*

$$B = P^{-1}AP$$

Remarque : Lorsque A et B sont les matrices de deux endomorphismes dans deux bases alors ces matrices sont semblables.