Applications Linéaires

Dans tout ce TD la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Généralités

Exercice 1 (Polynômes)**.**
Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P'(2X+1) + P(3X-1) \end{array}$
6. $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$
7. $f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & X^2 \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t + X \int_{-1}^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$
8. $f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & ? \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(X+t)\,\mathrm{d}t \end{array}$

Exercice 2 (Matrice)**.**
On note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et A une matrice carrée d'ordre n fixée. Les application suivantes sont elle linéaires?

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & M + M^{\mathrm{T}} \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & M^2 \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & AM \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & A^2 M \end{array}$

Exercice 3 (Fonctions)**.**
On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' + f \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & x \mapsto f(x+2) \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f(0)f' \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$

Exercice 4 ()**.**
Soit E_1,E_2, F_1 et F_2 des $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

1. On munit $E_1 \times E_2$ des opérations naturelles (?) démontrer rapidement que $E_1 \times E_2$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. Soit $f_1 \in L(E_1, F_1)$ et $f_1 \in L(E_1, F_1)$ On pose
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \to & F_1 \times F_2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{array}$$
Montrer que $\varphi \in L(?, ?)$.
3. Soit $g_1 \in L(E_1, F_1)$ et $g_2 \in L(E_2, F_1)$ on définit
$$\psi : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \to & ? \\ (x_1, x_2) & \mapsto & g_1(x_1) + g_2(x_2) \end{array}$$
Montrer que $\psi \in L(?, ?)$.
4. Soit $h_1 \in L(E, F_1)$ et $h_2 \in L(E, F_2)$ on note
$$\zeta : \begin{array}{ccc} E & \to & F_1 \times F_2 \\ u & \mapsto & (h_1(u), h_2(u)) \end{array}$$

Exercice 5 (Équation différentielle)**.**
On note E l'ensmble des fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

1. On pose φ la fonction de E dans E telle que $\varphi(f)$ est la fonction définie par $x \mapsto f'(x) - xf(x)$
   (a) Montrer que φ est linéaire
   (b) Donner une base de Ker φ
   (c) φ est elle surjective?
2. On pose ψ la fonction de E dans E telle que $\psi(f) = f'' + af' + bf$
   (a) Montrer que ψ est linéaire
   (b) Donner une base de Ker ψ

Noyau et image

Exercice 6.
Soit φ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.

1. Comparer au sens de l'inclusion Im φ^2 et Im φ.
2. Comparer Ker ϕ et Ker φ^2
3. Montrer à l'aide de contres exemples qu'il n'y a pas égalité dans les inclusions précédentes.

Exercice 7.
Soit
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Calculer le noyau de φ ainsi que son image
3. On remplace l'ensemble de départ (respectivement d'arrivée) par $\mathbb{K}_n[X]$ (respectivement $\mathbb{K}_{n-1}[X]$). Montrer que cette application est bien définie et reprendre les questions précédentes

Exercice 8 (Produit cartésien)**.**
Calculer le noyau et l'image des fonctions définies dans l'exrcice 4. On essayera d'exprimer ces résultats en fonctions de l'image et du noyau des fonctions composantes

Applications linéaires, représentation matricielle dans les bases canoniques

Exercice 9.
Soit l'application linéaire :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, x-y). \end{array}$$

1. Écrire la matrice de l'application f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Même question avec l'application linéaire g définie par :

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+3z, y+2z, 2x+3y+4z). \end{array}$$

Exercice 10.
Soit l'application linéaire

$$d: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P'. \end{array}$$

Écrire la matrice de cette application relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 11.
Soient les applications linéaires f et g définies par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X+1). \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X-1). \end{array}$$

Écrire les matrices de ces applications relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, puis multiplier ces matrices entre elles. Que remarque t-on ?

Exercice 12.

1. Écrire la matrice A relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ de l'application linéaire

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)). \end{array}$$

2. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, en déduire qu'il existe un unique polynôme P de degré 2 tel que $P(0) = a$, $P(1) = b$ et $P(2) = c$.
   Calculer en fonction de a, b et c ce polynôme.

Dans d'autres base

Exercice 13.
Soit : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$

1. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques.
2. Écrire la matrice de f avec $\mathbb{R}_3[X]$ muni de la base $(1, 1+X, 1+X^2, 1+X^3)$ et $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $(X(X-1), X(X+1), (X+1)(X-1))$.

Exercice 14.
On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (x+2y-2z, 2x+y-2z, 2x+2y-3z)$$

et $\mathbf{u_1} = (1,1,1)$, $\mathbf{u_2} = (-1,1,0)$ et $\mathbf{u_3} = (1,0,1)$.

1. Écrire la matrice A de f dans la base cannonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(\mathbf{u_1})$, $f(\mathbf{u_2})$ et $f(\mathbf{u_3})$ et écrire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}' = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$.
3. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 15.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- Définir l'application f telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$ où $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Définir l'application g telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Définir l'application h telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}(h)$ où $\mathscr{D}$ est la base $(1, 1+X, 1+X+X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 16.
On reprend les notations de l'exo 12.
On pose $P_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}$, $P_1 = \frac{X(X-2)}{-1}$ et $P_2 = \frac{X(X-1)}{2}$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Écrire la matrice de l'application f en prenant comme base de $\mathbb{R}_2[X]$ cette base et comme base de $\mathbb{R}^3$ la base canonique.
3. En déduire une expression de f^{-1} de la forme

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & R_2[X] \\ (a,b,c) & \mapsto & ? \end{array}.$$

Exercice 17.
Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y, x, -x-y-z) \end{array}$

1. Écrire A la matrice de f dans la base canonique
2. Calculer A^2, en déduire $f \circ f$.
3. f est elle bijective ? si oui calculer sa bijection réciproque
4. Soit $\mathscr{B}' = ((1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1)$ montrer que c'est une base et calculer la matrice de f dans cette base. On note B cette matrice, quelle est le lien entre A et B

Matrices de passage

Exercice 18.
Soit $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire, dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer des vecteurs $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ non nuls tels que $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$, $f(\mathbf{w}) = -3\mathbf{w}$.

2. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice N de l'application f dans cette base.
4. Donner la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathscr{B}$.
   Calculer son inverse P^{-1}.
5. Donner la relation entre les matrices M, N et P. En déduire le calcul de M^n.

Exercice 19.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & X(P(X+1) - P(X-1)) \end{array}$

1. Écrire la matrice de φ dans la base canonique
2. En utilisant une matrice de passage écrire la matrice de φ dans la base $(1, -1+X, -X+X^2, -X^2+X^3)$

Exercice 20.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$

1. Écrire la matrice de φ dans la base canonique
2. En utilisant une matrice de passage écrire la matrice de φ dans la base $(X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-3), X(X-2)(X-3), (X-1)(X-2)(X-3)$

Bases adaptées

Exercice 21.
Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & \left(x, \dfrac{x+y-z}{2}, \dfrac{x-y+z}{2}\right) \end{array}$$

1. Écrire A la matrice de f dans la base canonique
2. Calculer A^2, en déduire $f \circ f$.
3. f est elle bijective? si oui calculer sa bijection réciproque
4. Soit $\mathscr{B}' = ((0,1,1), (1,0,1), (0,1,-1)$ montrer que c'est une base et calculer la matrice de f dans cette base.
   On note B cette matrice, quelle est le lien entre A et B (on fera apparaître P une matrice de passage)

Exercice 22.
Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e_1' = e_2 + e_3,\ e_2' = e_3 + e_1,\ e_3' = e_1 + e_2 \text{ et } f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$ puis écrire la matrice de passage$P$ de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers cette base.
2. Montrer que (f_1', f_2') est une base de $\mathbb{R}^2$ puis écrire la matrice de passage Q de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers cette base $\mathbb{R}^2$.On note B la matrice de u dans les bases (e_1', e_2', e_3') (espace de départ) et (f_1', f_2') (espace d'arrivé). Trouver un lien entre A B eP et Q
3. Calculer B

Exercice 23.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x-2z, y-2z, -z) \end{array}$

1. Écrire A la matrice de f dans la base canonique
2. Calculer A^2, en déduire $f \circ f$.
3. f est elle bijective? si oui calculer sa bijection réciproque
4. Soit $\mathscr{B}' = ((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)$ montrer que c'est une base et tracer(directement) la matrice de f dans cette base.
5. On note B cette matrice, quelle est le lien entre A et B.On fera intervenir P une matrice de passage.

Exercice 24.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$.
2. Montrer que $\mathscr{B} = \big(\mathbf{u},\ f(\mathbf{u}),\ f^2(\mathbf{u})\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de f dans cette base.
4. À l'aide de $\mathscr{B}$ trouver une base de Ker f et une base de Im f.

Théorème du rang, image, noyaux

Exercice 25.
On désigne par $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_3},\ \mathbf{e_3},\ \mathbf{e_4})$ la base canonique de R^4, et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f et le rang de f.
2. Montrer que $\mathscr{B}' = (\mathbf{e_3},\ \mathbf{e_1} - \mathbf{e_4},\ -2\mathbf{e_2},\ \mathbf{e_1} + \mathbf{e_4})$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 26.
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par $f(x, y, z, t) = (x-y+z, y+z+t, 0, x+y+3z+2t)$.

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice A représentant l'endomorphisme f dans cette base.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire la dimension de Im (f) et une base de Im (f).
5. Quelle est la dimension du noyau de f? Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de Ker (f).

Exercice 27.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de Ker (f) et de Im (f), et le rang de f.

Exercice 28.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de Ker (f) et de Im (f) ainsi que le rang de f.
2. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

Pour aller plus loin

Exercice 29 (Polynômes de Lagrange)**.**
Cet exercice généralise l'exercice 12 Soit $n \geq 1$ un entier. On se donne $(n+1)$ réels $x_0, \ldots, x_n$ deux à deux distincts, et $y_0, \ldots, y_n$ une autre liste de $(n+1)$ réels (non nécessairement deux à deux distincts). On appelle polynôme interpolateur des y_i aux points x_i un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i = 0, \ldots, n$. Pour tout entier $i = 0, \ldots, n$, on définit le polynôme L_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$L_i = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$$

1. Pour i et j dans $[\![0, n]\!]$, donner une expression simple de $L_i(x_j)$
2. On pose $P(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(X)$. Démontrer que P est un polynôme interpolateur des y_i aux points x_i.
3. Démontrer qu'il existe un unique polynôme interpolateur des y_i aux points x_i dans $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Que peut on dire de la famille $(L_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$)
5. **Interprétation en terme d'application linéaire**.
   On pose
   $$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{n+1} & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ (y_0, \ldots, y_n) & \mapsto & \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(X) \end{array}$$
   Montrer que cette application est un isomorphisme.
6. **python**
   (a) Écrire une fonction `lagrange` qui prend en arguments une liste x de points d'interpolation x_i, une liste y de valeurs y_i, de même longueur que x, a un réel, et qui renvoie la valeur de $P(a)$, où P est le polynôme interpolateur défini précédemment.
   (b) Sur un même graphique faire apparaître les graphes de $x \mapsto \sin(x)$ et du polynôme interpolateur de cette fonction au points $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{2\pi}{n} \ldots x_k = \frac{2\pi}{n}, \ldots, x_n = 2\pi$
   (c) Que se passe t il quand n devient grand?

Exercice 30.
Soit f et g deux endomorphisme de E un espace vectoriel. Montrer que $f \circ g = 0$ si et seulement si Im $g \subset$ Ker f.

Exercice 31 (Endomorphismes qui commutent, noyaux et images)**.**
Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Démontrons que ker(u) et Im u sont stables par v, c'est-à -dire que

$$\forall x \in \text{Ker } u, \quad v(x) \in \text{Ker } u \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \text{Im } u, \quad v(x) \in \text{Im } u.$$

Exercice 32.
Soient α, β deux réels et

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha,\beta}$ est surjective.

Exercice 33.
On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie égale à n et que

$$\text{Im } f = \text{Ker } f$$

Montrer que $f^2 = 0$ et que $n = 2\text{rg}\,(f)$.
La réciproque est elle vraie?

Exercice 34 (Endomorphisme nilpotent)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et f un endomorphisme de E et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$f^p = 0 \qquad f^{p-1} \neq 0$$

On rappelle que

$$f^p = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdot \circ f}_{p \text{ fois}}$$

1. Préciser ce que veut dire $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que
   $$(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1})$$
   est une famille libre.
   indication choisir un $x \in E$ tels que $f^{p-1}(x) \neq 0$ et supposer que $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est liée.

Exercice 35.
On considère l'application linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$$

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Ker f^n et Im f^n.

Exercice 36.
Soient λ un nombre réel et f l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & XP' - \lambda P. \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer, suivant les valeurs de λ, le noyau de f.

Exercice 37 (Image de certaines familles)**.**
Soit $f \in \mathscr{L}(()E, F)$ où E et f sont de dimension finie Soit $\mathscr{E} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_p})$ une famille de E. On note $\mathscr{F} = (f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), \ldots, f(\mathbf{e_p}))$

1. On suppose que $\mathscr{F}$ est libre, montrer que $\mathscr{E}$ est libre.
2. On suppose que f est injective et $\mathscr{E}$ libre. Montrer que $\mathscr{F}$ est libre.
3. On suppose que f est surjective et $\mathscr{E}$ génératrice de E . Montrer que $\mathscr{F}$ est génératrice de F.
4. Trouver un contre exemple avec f injective et $\mathscr{E}$ génératrice de E et $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice de F
5. On suppose que pour toute famille de E, son image par f est libre montrer que dans ce cas f est injective
6. Énoncer et démontrer un résultat analogue pour f surjective?

Problèmes, applications

Exercice 38.
Soit $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire, dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer un vecteur $\mathbf{e_1} \neq 0$ tel que $f(\mathbf{e_1}) = \frac{1}{2}\mathbf{e_1}$.
2. Déterminer un vecteur $\mathbf{e_2} \neq 0$ tel que $f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e_2}$.
3. Montrer que $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Écrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$.
5. Calculer l'inverse de P, et écrire la matrice T de f dans la base $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$.
6. Quelle est la relation entre les matrices M, P et T ?
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1/2^n & 2n/2^n \\ 0 & 1/2^n \end{pmatrix}.$$

8. En déduire l'expression de M^n en fonction de n.
9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 9$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

   (a) On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_n = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = (17n+1).\frac{1}{2^n}.$$

   (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 39. 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer une base Ker f et une base de Im f.
   (b) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un coefficient non nul.
   (c) Calculer M^k pour tout entier $k \geq 0$.

2. Même question avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 40.
Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie.
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.
   (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $P(E_{n+1}) = \dfrac{2}{3}P(E_n) + \dfrac{1}{2}P(F_n)$.
   (b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.
   (c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$.

   Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.

2. (a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
   (b) On note C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de P. Calculer MC_1, MC_2, MC_3 et MC_4,
   (c) Justifier que $M = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on déterminera.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.
   (b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2, \quad U_n = M^{n-2}U_2$.
   (c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n, puis en déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.
   (d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{2}{10}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ième}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

   (a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k.

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

   (a) Calculer $P(S_n = 2)$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geqslant 4$.

   (b) Déterminer $P(S_n = n)$.

   (c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k, puis déterminer $E(S_n)$ en fonction de n.