Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 3

8 décembre 2023

Durée de l'épreuve : 2h

L'utilisation de la calculatrice, ou de tout autre appareil électronique (téléphone portable, ordinateur...), est ***interdite****.*

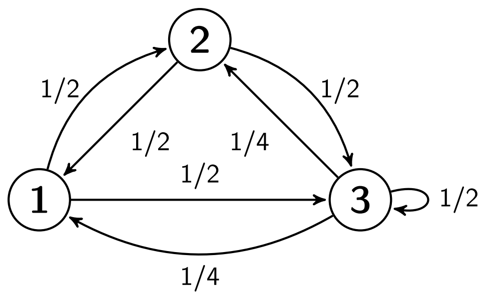
Le devoir comporte un seul problème.

Dans ce problème le terme « graphe » désignera un graphe **orienté et pondéré** tel que

— une arête peut relier un sommet à lui-même (c'est le cas du sommet 3 de G_1) ;

— pour tout couple (i, j) de sommets, l'arête allant de i à j est étiquetée par un réel $s_{i,j} \in [0; 1]$, représentant une probabilité de saut (par exemple $s_{3,1} = \dfrac{1}{4}$ et $s_{3,3} = \dfrac{1}{2}$ dans G_1) ;

— pour tout sommet i, la somme des probabilités étiquetant les arêtes partant de i est égale à 1.



Graphe G_1

Une particule est placée à l'instant $n = 0$ sur le sommet i d'un graphe G. Elle saute aléatoirement à l'instant $n = 1$ sur un autre sommet de G en suivant une des arêtes partant de i, la probabilité qu'elle suive l'arête de i vers j étant égale à $s_{i,j}$. On poursuit ainsi le processus, la particule sautant à chaque instant suivant, $n = 2$, 3, 4 ...du sommet du graphe où elle se trouve vers un nouveau sommet (éventuellement le même) en suivant aléatoirement l'une des arêtes selon les probabilités indiquées.

On suppose que les sommets du graphe G sont numérotés de 1 à m. Le processus définit une suite $\mathscr{A} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{1, \ldots, m\}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = k$ si la particule se trouve sur le sommet k du graphe G après le $n^{\text{ème}}$ saut. $\mathscr{A}$ est appelée *marche aléatoire* sur le graphe G.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

A. Marches aléatoires sur des graphes finis

A.I. On étudie dans cette partie quelques propriétés de la marche aléatoire sur le graphe G_1 ci-dessus.

1. On considère la marche aléatoire sur le graphe G_1 partant de $X_0 = 1$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n le vecteur colonne $Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

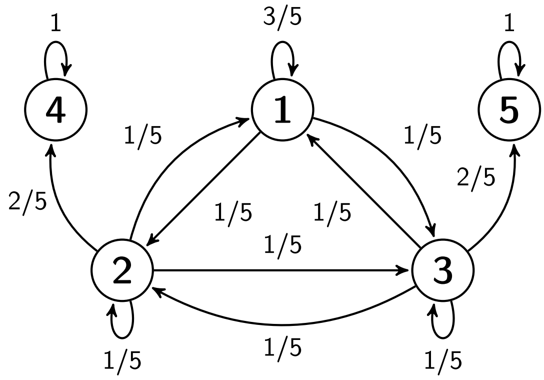
   a) En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_n, démontrer que $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{2}P(X_n = 2) + \dfrac{1}{4}P(X_n = 3)$.

   b) Établir une relation matricielle entre Y_{n+1} et Y_n de la forme $Y_{n+1} = MY_n$ où M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à déterminer.

2. Démontrer que, pour tout n entier naturel, $Y_n = M^n Y_0$.
3. Donner, pour $n \geqslant 1$, $P(X_n = 3)$. Justifier votre réponse.

4. a) Calculez M^2, puis $M^2 \times (2M - I)$ (où I est la matrice identité d'ordre 3).
   En déduire la relation $M^3 = \dfrac{1}{2}M^2 + \dfrac{1}{2}M$.
   b) En déduire l'existence deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout entier naturel n non nul : $M^n = u_n M^2 + v_n M$.
   c) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.
   d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \dfrac{1}{2}u_{n+1} + \dfrac{1}{2}u_n$.
   e) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_n et v_n en fonction de n.
5. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul la loi de X_n.

A.II. On considère maintenant une marche aléatoire $\mathscr{A}_2 = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le graphe G_2 ci-dessous. On constate que lorsque la particule atteint le sommet 4 ou 5, elle y reste ensuite indéfiniment avec une probabilité 1 : ces deux sommets sont dits *absorbants*. On dit que la marche aléatoire est *absorbée* en 4 ou 5 lorsqu'elle atteint le sommet correspondant. On s'intéresse ici à la probabilité pour $\mathscr{A}_2$ d'être absorbée en 4 ou 5 en fonction de son point de départ. Pour tout couple d'entiers (i, j) avec $1 \leqslant i \leqslant 5$ et $4 \leqslant j \leqslant 5$, on note $a_{i,j}$ la probabilité que $\mathscr{A}_2$ soit absorbée en j sachant que $X_0 = i$.



Graphe G_2

6. Donner, en justifiant très rapidement, les valeurs de $a_{4,4}$, $a_{4,5}$, $a_{5,4}$ et $a_{5,5}$.
7. En distinguant les cas selon le résultat du premier saut de la particule, montrer que $(x, y, z) = (a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4})$ est un triplet solution du système

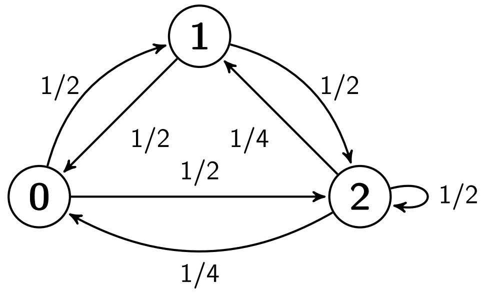
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3}{5}x + \dfrac{1}{5}y + \dfrac{1}{5}z = x \\[2ex] \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{5}y + \dfrac{1}{5}z + \dfrac{2}{5} = y \\[2ex] \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{5}y + \dfrac{1}{5}z = z. \end{array}\right.$$

8. Résoudre le système.
   Indication facultative : *on pourra vérifier que $y + z = 1$, puis on déterminera x.*
9. Donner, par un argument sur la géométrie du graphe ne nécessitant aucun calcul supplémentaire, les valeurs de $(a_{1,5}, a_{2,5}, a_{3,5})$.
10. Montrer que la probabilité que $\mathscr{A}_2$ soit absorbée (en 4 ou en 5 indifféremment) est égale à 1, quel que soit son point de départ.
11. On suppose que la loi de X_0 est uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, et on constate que $\mathscr{A}_2$ est absorbée en 4. Quelle est la probabilité que la particule soit partie du sommet 3 ?

B. Simulation informatique

Dans cette partie et uniquement dans cette partie les sommets d'un graphe à m sommets sont numérotées par les entiers 0, 1, 2, 3,. . .,$m-1$.

Les graphes seront manipulés à l'aide de leur matrice d'adjacence. Cette matrice d'adjacence sera représentée par une liste de listes. Par exemple le graphe



Graphe G_1 (bis)

a pour matrice d'adjacence

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

et sera représenté par `A=[[0,1/2,1/2],[1/2,0,1/2],[1/4,1/4,1/2]]`.

B.I. Rappels et commandes Python (aucune question dans cette partie)

— Dans une matrice d'adjacence, l'élément situé à la ligne i et à la colonne j : `A[i][j]`, représente le poids de l'arête partant du sommet i et arrivant au sommet j. S'il n'y a pas d'arête partant de i et arrivant à j cette valeur vaut 0.

— La longueur d'une liste `L` s'obtient avec l'instruction `len(L)`

— Pour tester si un nombre à virgule `x` est égal à `y` , on n'utilisera pas l'opérateur `==` mais le test `abs(x-y)<10**(-8)`.

— La fonction `choice` du module `numpy.random` permet de choisir un élément d'une liste :

```
numpy.random.choice(liste_objets,p=liste_proba)
```

* l'argument liste_objet est une liste parmi lesquels la fonction va choisir un objet.
* l'argument liste_proba est une liste de même longueur que la première qui représente les probabilités de choisir chacun des objets de la première liste.
* la valeur renvoyée est un objet de la liste liste_objet, choisi au hasard, en respectant les probabilités données.

Par exemple

```
numpy.random.choice(['a','b','c'],p=[0.25,0.25,0.5])
```

renvoie `'a'` avec la probabilité 1/4, `'b'` avec la probabilité 1/4 et `'c'` avec la probabilité 1/2.

On suppose dans la suite avoir importé le module `numpy.random` avec la commande `import numpy.random as rd`.

B.II. 12. Écrire une fonction `valide(A)` qui renvoie le booléen `True` si la matrice d'adjacence A respecte toutes les conditions imposées dans l'introduction pour les graphes et `False` sinon. On supposera, sans le tester, que la matrice `A` est carrée.

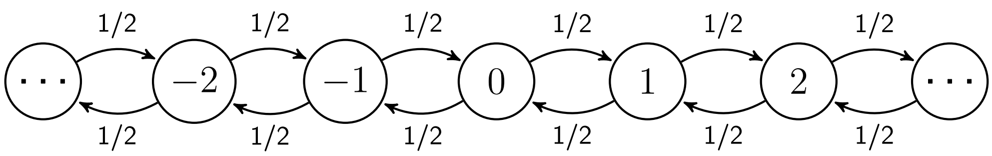
Dans la suite de cette partie on considérera sans avoir à le tester que les matrices d'adjacences passées en argument vérifient bien ces propriétés.

13. Compléter la fonction suivante, vous pouvez vous contenter de recopier sur votre copie les lignes à compléter (lignes 9 et 15 à 20).

```
1  def simulation(A, depart ,n):
2      '''A: matrice d'adjacence
3      depart :sommet de depart
4      n :nombre d'etapes
5      renvoie la liste des positions lors  des n etapes ,
6      y compris la position initiale
7      '''
8      #liste des positions successives
9      liste_position =.......
10
11     #position actuelle
12     position=depart
13
14     # liste des sommets du graphe
15     liste_sommet=[i for i in ..............]
16
17     for i in range(1,n+1):
18         position=rd.choice(..........., p=............)
19         liste_position.append(....................)
20     return .................
```

14. Écrire une fonction absorbant(A) qui pour une matrice d'adjacence A renvoie la liste (éventuellement vide) des sommets absorbants du graphe représenté par la matrice.

C. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$



On considère ici une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$: la particule part du sommet 0 à l'instant $n = 0$. À l'instant 1, elle peut sauter en 1 ou en -1 avec la même probabilité $\dfrac{1}{2}$. À chaque instant suivant, si elle se trouve sur le sommet $i \in \mathbb{Z}$, elle saute de même soit sur $i + 1$ soit sur $i - 1$ avec la même probabilité $\dfrac{1}{2}$ (on dira respectivement qu'elle saute vers la droite ou vers la gauche). En conservant les notations de l'introduction, on obtient ainsi une suite $\mathscr{A} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

C.I. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = X_n - X_{n-1}$ la variable égale au n-ième saut. Les variables $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supposées mutuellement indépendantes.

15. Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$.
16. Calculer l'espérance et la variance de X_n.

C.II. On s'intéresse maintenant à la probabilité que la marche aléatoire passe par 0.

17. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que X_{2k} ne prend que des valeurs paires. Que peut-on dire de X_{2k+1} ? Que vaut $P(X_{2k+1} = 0)$?
18. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que $q_k = P(X_{2k} = 0) = \dfrac{1}{4^k}\dbinom{2k}{k}$.
19. Pour deux entiers $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in [\![-k; k]\!]$, déterminer plus généralement $P(X_{2k} = 2\ell)$.

C.III. On note T la variable aléatoire définie par :

- $T = \min\{p \in \mathbb{N}^*, X_p = 0\}$ si l'ensemble $\{p \in \mathbb{N}^*, X_p = 0\}$ n'est pas vide ;
- $T = 0$ sinon.

T s'interprète comme le *temps de premier retour en* 0 de la marche aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Le but de cette partie est d'établir la loi de T.
Pour un entier naturel $k \geqslant 1$, on considère les probabilités

* $q_k = P(X_{2k} = 0)$ (cette valeur a été calculée à la question **C.II.**18.) ;
* $r_k = P(T = 2k)$;

et on convient $q_0 = 1$.
On admet dans cette partie l'égalité suivante, valable pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n. \tag{1}$$

20. Montrer que $r_1 = \dfrac{1}{2}$.
21. À l'aide d'une décomposition de l'événement $[X_{2n} = 0]$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$q_n = \sum_{k=1}^{n} q_{n-k} r_k.$$
22. En déduire la valeur de r_2.
23. Soit $n \geqslant 3$ un entier fixé. On suppose que pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $r_k = q_{k-1} - q_k$. Établir que
$$r_n = \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k}q_k - \sum_{k=0}^{n-2} q_{n-k-1}q_k.$$
24. On se place dans le même cadre que dans la question précédente. À l'aide de (1), montrer que $r_n = q_{n-1} - q_n$.
25. Conclure.