Correction du devoir surveillé n° 3

A. Marches aléatoires sur des graphes finis

A.I. 1. a) Soit n un entier naturel.

D'après le cours $[X_n = 1]$, $[X_n = 2]$, $[X_n = 3]$ forment un système complet d'évènements, en utilisant le théorème des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1)+P(X_n = 2)P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1)+P(X_n = 3)P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 1)$$

L'énoncé, sous la forme du graphe nous donne ces probabilités conditionnelles, $P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = j)$ est le poids de l'arête de i à j.

On a donc $\boxed{P(X_{n+1} = 1) = 0P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2) + \frac{1}{4}P(X_n = 3).}$

b) De même que dans la question précédente, on obtient $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 3)$. On a donc :

$$\begin{cases} P(X_{n+1} = 1) & = 0P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2) + \frac{1}{4}P(X_n = 3) \\ P(X_{n+1} = 2) & = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + 0P(X_n = 2) + \frac{1}{4}P(X_n = 3) \\ P(X_{n+1} = 3) & = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2) + \frac{1}{2}P(X_n = 3) \end{cases}$$

ce que l'on peut écrire sous forme d'un produit de matrice :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = MY_n \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.}$$

2. **Initialisation** Quand $n = 0$, $M^n = I_3$ la matrice identité d'ordre 3, on a donc bien

$$Y_0 = M^0 Y_0$$

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons avoir démontré que

$$Y_n = M^n Y_0$$

Alors

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= MY_n && \text{d'après la question précédente} \\ &= M(M^n Y_0) && \text{Hypothèse de récurrence} \\ &= M^{n+1}Y_0 && \text{(règles de calcul sur les matrices)} \end{aligned}$$

Conclusion D'après le principe de récurrence

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ Y_n = M^n Y_0}$$

Complément On peut aussi remarquer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de matrices, mais on sort du cadre du programme et il n'est pas autorisé d'utiliser cet argument aux concours.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} P(X_n = 3) &= \frac{1}{2}P(X_{n-1} = 1) + \frac{1}{2}P(X_{n-1} = 2) + \frac{1}{2}P(X_{n-1} = 3) && \text{question 1.b), } n-1 \in \mathbb{N} \\ &= \frac{1}{2}\left(P(X_{n-1} = 1) + P(X_{n-1} = 2) + P(X_{n-1} = 3)\right) \\ &= \frac{1}{2} && \text{car } [X_{n-1} = 1],\ [X_{n-1} = 2],\ \text{et } [X_{n-1} = 3] \text{ forment un S.C.E.} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = 3) = \frac{1}{2}}$$

4. a) On sait que $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{M^2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad M^2(2M-1) = M}$$

Donc

$$2M^3 - M^2 = M$$

$$\boxed{M^3 = \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{2}M}$$

b) **Initialisation** Pour $n = 0$, si on pose $u_1 = 0$ et $v_1 = 1$ on a bien

$$M^1 = u_1 M^2 + v_1 M$$

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe deux réels u_n et v_n tels que

$$M^n = u_n M^2 + v_n M$$

alors

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= MM^n \\
&= M(u_n M^2 + v_n M) && \text{hypothèse de récurrence} \\
&= u_n M^3 + v_n M^2 \\
&= u_n \left(\frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{2}M\right) + v_n M^2 && \text{question précédente} \\
&= \left(\frac{1}{2}u_n + v_n\right) M^2 + \frac{1}{2}v_n M \\
&= u_{n+1}M^2 + v_{n+1}M && \text{en posant } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + v_n \qquad v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n
\end{aligned}$$

On a donc trouvé deux réels u_{n+1} et v_{n+1} tels que

$$M^{n+1} = u_{n+1}M^2 + v_{n+1}M$$

Conclusion D'après le principe de récurrence

$$\boxed{\text{Il existe deux suites réelles } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ telles que pour tout } n \in \mathbb{N}^*\ M^n = u_n M^2 + v_n M.}$$

c) On a trouvé dans la partie hérédité de la question précédente

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + v_n \qquad v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n.}$$

d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n.}$$

e) On reconnaît alors une suite récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ admet pour solutions

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

Il existe donc deux constantes réelles α et β telles

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme on peut écrire

$$M = 0M^2 + 1M \qquad M^2 = 1M^2 + 0M \tag{*}$$

on peut poser

$$u_1 = 0 \qquad u_2 = 1$$

et on détermine donc les constantes α et β

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}$$

On a pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$v_n = \frac{1}{2}u_{n-1} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)$$

et pour $n = 1$, d'après $(*)$, $v_n = 1$, et la formule précédente reste valable

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)}$$

5. Par construction pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n prend ses valeurs dans $[\![1;\ 3]\!]$
   On sait que pour $n \in \mathbb{N}^*$
   $$Y_n = M^n Y_0 = \left(u_n M^2 + v_n M\right) Y_0$$
   Comme d'après l'énoncé à l'instant initial le mobile est en position 0
   $$Y_0 = \begin{pmatrix} P(X_0 = 1) \\ P(X_0 = 2) \\ P(X_0 = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   il suffit de calculer la première colonne de la matrice M^n. On a déjà démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = 3) = \dfrac{1}{2}$ donc il suffit de calculer les deux premières composantes de cette colonne. et en utilisant $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) = 1$, on constate qu'il suffit de calculer la première composante.
   $$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^* \ P(X_n = 1) = \frac{1}{4} - \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}},\ P(X_n = 2) = \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}},\ P(X_n = 3) = \frac{1}{2}}$$

   Compléments
   - La loi de X_0 est donnée dans l'énoncé.
   - On peut facilement calculer les limites de ces valeurs. Sous forme matricielle on note $Y_{+\infty}$ cette limite. Alors $Y_\infty = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ On constate que $MY_\infty = Y_\infty$. On vient de trouver un *état stable de la marche aléatoire.*

A.II. 6. Si la particule est déjà sur un sommet absorbant, elle y reste et ne peut donc pas atteindre l'autre sommet absorbant.

$$\boxed{a_{4,4} = a_{5,5} = 1 \text{ et } a_{4,5} = a_{5,4} = 0.}$$

7. Notons A_j l'événement « $\mathscr{A}_2$ est absorbé en j ».
   Le famille d'événements $([X_1 = 1], [X_1 = 2], [X_1 = 3], [X_1 = 4], [X_1 = 5])$ forme un système complet d'événement. En appliquant la formule des probabilités totale à la probabilité conditionnelle $P_{[X_0=1]}$, on trouve

$$
\begin{aligned}
P_{[X_0=1]}(A_4) = {} & P_{[X_0=1]}(X_1=1)P_{[X_0=1]\cap[X_1=1]}(A_4) + P_{[X_0=1]}(X_1=2)P_{[X_0=1]\cap[X_1=2]}(A_4) \\
& + P_{[X_0=1]}(X_1=3)P_{[X_0=1]\cap[X_1=3]}(A_4) + P_{[X_0=1]}(X_1=4)P_{[X_0=1]\cap[X_1=4]}(A_4) \\
& + P_{[X_0=1]}(X_1=5)P_{[X_0=1]\cap[X_1=5]}(A_4).
\end{aligned}
$$

On remarque alors que, pour $i \in [\![1;5]\!]$, $P_{[X_0=1]\cap[X_1=i]}(A_4)$ est égal à la probabilité d'être absorbé au sommet 4 en commençant au sommet i soit $a_{i,4}$. En effet, une fois que la particule est au sommet i à l'instant 1, les possibilités de parcours suivis par la particules sont exactement les mêmes que si on considère que la particule est partie du sommet i à l'instant initial. L'endroit où se trouvait la particule à l'instant 0 n'a plus d'influence une fois le premier saut effectué.
Comme $a_{1,4} = x$, $a_{2,4} = y$, $a_{3,4} = z$, $a_{4,4} = 1$ et $a_{4,5} = 0$ et d'après les valeurs des probabilités conditionnelles lues sur le graphe, on obtient bien $x = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z + 0 + 0$.
De même,

$$
\begin{aligned}
P_{[X_0=2]}(A_4) = {} & P_{[X_0=2]}(X_1=1)P_{[X_0=2]\cap[X_1=1]}(A_4) + P_{[X_0=2]}(X_1=2)P_{[X_0=2]\cap[X_1=2]}(A_4) \\
& + P_{[X_0=2]}(X_1=3)P_{[X_0=2]\cap[X_1=3]}(A_4) + P_{[X_0=2]}(X_1=4)P_{[X_0=2]\cap[X_1=4]}(A_4) \\
& + P_{[X_0=2]}(X_1=5)P_{[X_0=2]\cap[X_1=5]}(A_4),
\end{aligned}
$$

ce qui nous donne $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z + \frac{2}{5} \times 1$.
Et enfin, en écrivant

$$
\begin{aligned}
P_{[X_0=3]}(A_4) = {} & P_{[X_0=3]}(X_1=1)P_{[X_0=3]\cap[X_1=1]}(A_4) + P_{[X_0=3]}(X_1=2)P_{[X_0=3]\cap[X_1=2]}(A_4) \\
& + P_{[X_0=3]}(X_1=3)P_{[X_0=3]\cap[X_1=3]}(A_4) + P_{[X_0=3]}(X_1=4)P_{[X_0=3]\cap[X_1=4]}(A_4) \\
& + P_{[X_0=3]}(X_1=5)P_{[X_0=3]\cap[X_1=5]}(A_4),
\end{aligned}
$$

on obtient $z = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z$.

Le triplet $(x, y, z) = (a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4})$ est bien solution du système

$$
\begin{cases}
\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = x \\
\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z + \frac{2}{5} = y \\
\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = z.
\end{cases}
$$

8. On note (S) ce système

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-4y+z=-2 \\ x+y-4z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z &= 0 \\ -7y+3z &= -4 \quad L_2 \leftarrow 2L_2+L_1 \\ 3y-7z &= 0 \quad L_3 \leftarrow 2L_3+L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z &= 0 \\ -7y+3z &= -4 \\ -40z &= -12 \quad L_3 \leftarrow 7L_3+3L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z &= 0 \\ -7y+3z &= -4 \\ z &= \dfrac{3}{10} \quad L_3 \leftarrow 7L_3+3L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z &= 0 \\ y &= \dfrac{7}{10} \\ z &= \dfrac{3}{10} \quad L_3 \leftarrow 7L_3+3L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{1}{2} \\ y &= \dfrac{7}{10} \\ z &= \dfrac{3}{10} \quad L_3 \leftarrow 7L_3+3L_2 \end{cases}$$

$$\boxed{a_{1,4} = \frac{1}{2},\ a_{2,4} = \frac{7}{10} \text{ et } a_{3,4} = \frac{7}{10}}$$

9. Le graphe (y compris les poids des arètes) est symétrique par rapport à la verticale. Pour le sommet absorbant 5 le sommet de départ 1 à le même rôle que pour le sommet absorbant 4. Pour le sommet absorbant 5 les rôles des sommets de départ 2 et 3 sont inversés.

$$\boxed{a_{1,5} = \frac{1}{2},\ a_{3,5} = a_{2,4} = \frac{7}{10} \text{ et } a_{2,5} = a_{3,4} = \frac{7}{10}}$$

10. — Pour $i \in [\![1,\ 3]\!]$ on a $a_{i,4}+a_{i,5} = 1$ c'est à dire que sachant que la position de départ est i, la probabilité que la marche soit absorbée en 4 ou 5 est égale à 1.
— Si le sommet de départ est 4 ou 5 la marche est absorbée dès le moment initial

$$\boxed{\text{La probabilité que } \mathscr{A}_2 \text{ soit absorbée est égale à 1, quel que soit son point de départ.}}$$

11. On note A_4 l'événement : "la marche, est absorbée en 4."

$$\begin{aligned}
P_{A_4}(X_0=3) &= \frac{P(X_0=3)P_{[X_0=3]}(A_4)}{P(A_4)} && \text{formule de Bayes}\\
&= \frac{P(X_0=3)P_{[X_0=3]}(A_4)}{P(X_0=1)P_{[X_0=1]}(A_4)+P(X_0=1)P_{[X_0=3]}(A_4)+P(X_0=3)P_{[X_0=3]}(A_4)} && \text{probabilités totales}\\
&= \frac{\frac{1}{3}a_{3,4}}{\frac{1}{3}a_{1,4}+\frac{1}{3}a_{2,4}+\frac{1}{3}a_{3,4}}\\
&= \frac{a_{3,4}}{a_{1,4}+a_{2,4}+a_{3,4}}\\
&= \frac{\frac{7}{10}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{7}{10}}\\
&= \frac{7}{5+3+7}\\
&= \frac{7}{15}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Dans ce cas là, la marche est partie du sommet 3 avec une probabilité égale à } \frac{7}{15}}$$

B. Simulation informatique

12. On teste si tous les coefficients sont positifs ou nul, et si la somme des coefficients sur chaque ligne est égale à 1

```
def valide(A):
    '''envoie un booleen
    True si la matrice est stochastique (convention ligne)
    False' sinon

    La matrice (liste de liste ) est supposee carree'''

    Test=True
    n=len(A)
    for i in range(n):
        s=0
        for j in range(n):
            s=s+A[i][j]
            if A[i][j]<0:
                Test=False
        if abs(s-1)>10**-8:
            Test=False

    return Test
```

Pour plus d'efficacité on peut remplacer les boucles `for` par des boucles `while`

```
def ValideWhile(A):
'''envoie un booleen
True si la matrice est stochastique (convention ligne)
False' sinon

La matrice (liste de liste ) est supposee carree'''

Test=True
n=len(A)
```

```
    i=0
    while  i<n and Test:
        s=0
        j=0
        while j<n  and  Test:
            s=s+A[i][j]
            if A[i][j]<0:
                Test=False
            j+=1
        if abs(s-1)>10**-8:
            Test=False
        i+=1
    return Test
```

13.

```
def simulation(A,depart,n):
    '''A: matrice d'adjacence
    depart :sommet de depart
    n :nombre d'etapes
    renvoie la liste des positions lors  des n etapes ,
    y compris la position initiale
     '''
    #liste des positions successives
    liste_position =[depart]

    #position actuelle
    position=depart

    # liste des sommets du graphe
    liste_sommet=[i for i in range(len(A))]

    for i in range(1,n+1):
        position=rd.choice(liste_sommet,p=A[position])
        liste_position.append(position)
    return liste_position
```

14.
```
def absorbant(A):
    '''renvoie la liste des sommets absorbants
    On teste si le coef A[i][i] vaut 1
    ET
    si tous les autres coef sont nuls
    si on est sur que la matrice est bien une matrice de transition un seul des tests est necessaire

     '''
    L=[]
    for i in range(len(A)):
        if abs(A[i][i]-1)>10**-8:
            Test=False
        else:
            Test=True
            for j in range(len(A)):
                if i!=j and abs(A[i][j])>10**-8:
                    Test=False
        if Test:
            L.append(i)
    return L
```

C. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

C.I. 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} U_k &= \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1}) \\ &= X_n - X_0 && \text{télescopage} \\ &= X_n && \text{car } X_0 \text{ est constante égale à } 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \sum_{k=0}^{n} U_k}$$

16. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par définition, U_n représente le n ième déplacement, et prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$

$$P(U_n = 1) = P(U_n = -1) = \frac{1}{2}$$

On en déduit donc

$$E(U_n) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

et

$$V(U_n) = E(U_n^2) - E(U_n)^2 = (-1)^2\frac{1}{2} + (1)^2\frac{1}{2} - 0 = 1$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(U_k) = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$$

et comme les variables aléatoires sont indépendantes

$$V(X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(U_k) = \sum_{k=1}^{n} 1 = 1$$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ E(X_n) = 0 \text{ et } V(X_n) = n}$$

C.II. 17. Par définition X_0 ne prend qu'une valeur 0, qui est paire.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

Or les valeurs prises par U_k sont impaires (-1 ou 1). Si n est pair on somme un nombre pair d'entier impairs, on obtient un nombre pair. Si n est impair on somme un nombre impair de nombre impairs on obtient un nombre impair.

$$\boxed{\text{Les valeurs prises par } X_n \text{ ont la même parité que } n,\ P(X_{2n+1} = 0) = 0}$$

18. Soit $k \in \mathbb{N}$, $P(X_{2k} = 0)$ se réalise si au cours des $2k$ sauts, k ont lieu vers la droite. et k vers la gauche, pour choisir les positions des sauts vers la droite parmi les $2k$ sauts (les autres s'effectuant forcément à gauche), il y a $\binom{2k}{k}$ possibilités et comme les sauts se font équiprobablement dans les deux sens, la probabilité d'une séquence est $\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$.

$$\boxed{\text{Pour } k \in \mathbb{N},\ P(X_{2k} = 0) = \binom{2k}{k}\frac{1}{4^k}}$$

La formule, si ce n'est la démonstration, est juste pour $n = 0$

19. Soit $k \in \mathbb{N}$
Si $\ell \notin [\![-k;k]\!]$, alors en $2k$ sauts le mobile ne peut pas atteindre la position 2ℓ même si il se dirige toujours dans la bonne direction : $P(X_{2k} = 2\ell) = 0)$.
Soit $\ell \in [\![-k;k]\!]$. Notons N_d le nombre de sauts vers la droite lors des $2k$ premiers sauts, et N_g le nombre de sauts vers la gauche, l'évènement $[X_{2k} = 2\ell]$ se réalise si et seulement si

$$\begin{cases} 2k & = N_g + N_d \\ 2\ell & = -N_g + N_d \end{cases}$$

Il faut donc que le mobile effectue $k+\ell$ saut vers la droite et $k-\ell$ saut vers la gauche. Pour choisir la position des $k+\ell$ saut vers la droite il y a $\binom{2k}{k+\ell}$ possibilités.

$$\boxed{\text{Pour } k \in \mathbb{N}^*, \text{ et } \ell \in [\![-k;\ k]\!],\ P(X_{2k} = 2\ell) = \binom{2k}{k+\ell}\frac{1}{4^k}}$$

On admet

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n. \tag{1}$$

20. r_1 est la probabilité que la première fois que le mobile revient en 0 est le temps 2, comme le mobile se déplace forcément lors du premier saut

$$r_1 = P(T=2) = P(X_2 = 0) = \binom{2}{1}\frac{1}{4}^1 = \frac{2}{4}$$

$$\boxed{r_1 = \frac{1}{2}.}$$

21. $([T=2k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ forment un système complet d'événements (cours). On remarque que $P_{[T=2k]}(X_{2n} = 0)$ est la probabilité que le mobile soit de retour en 0 à l'étape $2n$ sachant que la première fois où il repassé en 0 est à l'étape $2k$. Comme le procédé est sans mémoire

$$P_{[T=2k]}(X_{2n} = 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ P(X_{2n-2k} = 0) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} q_n &= P(X_{2n} = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(T=2k)P_{[T=2k]}(X_{2n} = 0) && \text{probabilités totales} \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(T=2k)P(X_{2(n-k)} = 0) && \text{remarque précédente} \\ &= \sum_{k=1}^{n} r_k q_{n-k} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ q_n = \sum_{k=1}^{n} q_{n-k} r_k.}$$

22. r_2 vérifie

$$q_2 = r_1 q_1 + r_2 q_0$$

c'est à dire

$$\binom{4}{2}\frac{1}{16} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + r_2$$

donc

$$\boxed{r_2 = \frac{1}{8}}$$

23. Soit $n \geqslant 3$ un entier fixé. On suppose que pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $r_k = q_{k-1} - q_k$.
D'après la question 2
$$q_n = \sum_{k=1}^{n} q_{n-k} r_k$$
donc
$$q_n = \sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k} r_k + q_0 r_n$$
Comme d'après l'énoncé, $q_0 = 1$
$$\begin{aligned}
r_n &= q_n - \sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k} r_k \\
&= q_n - \sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k} \left(q_{k-1} - q_k\right) && \text{hypothèse de la question et } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \\
&= q_n - \sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k} q_{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k} q_k \\
&= q_n q_0 + \sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k} q_k - \sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k} q_{k-1} && \text{car } q_0 = 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} q_k - \sum_{k'=0}^{n-2} q_{n-k'-1} q_{k'} && \text{fusion première somme, changement d'indice somme 2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Sous ces hypothèses } r_n = \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} q_k - \sum_{k=0}^{n-2} q_{n-k-1} q_k.}$$

24. Sous les hypothèses de la question précédente.
$$\begin{aligned}
r_n &= \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} q_k - \sum_{k=0}^{n-2} q_{n-k-1} q_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} q_{n-k} q_k - q_n q_0 - \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k-1} q_k + q_{n-1} q_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^{n-k}} \binom{2(n-k)}{n-k} \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^{n-1-k}} \binom{2(n-1-k)}{n-1-k} \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} + q_{n-1} - q_n && \textbf{C.II.}\text{18.) et } q_0 = 1 \\
&= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2(n-k)}{n-k} \binom{2k}{k} - \frac{1}{4^{n-1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2(n-1-k)}{n-1-k} \binom{2k}{k} + q_{n-1} - q_n \\
&= \frac{1}{4^n} 4^n - \frac{1}{4^{n-1}} 4^{n-1} + q_{n-1} - q_n && (1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Sous les hypothèses de la question précédente } r_n = q_{n-1} - q_n}$$

25. On a bien vu que $r_1 = 1 - q_2 = \dfrac{1}{2}$ ce qui initialise la récurrence. Les questions précédentes forment l'hérédité d'une récurrence forte :

$$\boxed{\text{pour } n \in \mathbb{N}^* \,;\, r_n = q_{n-1} - q_n.}$$

26. Après calculs et en utilisant **C.II.**18.)

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^* \; ; \; r_n = \frac{1}{4^n}\left[4\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n}{n}\right] = \frac{2(2n-2)!}{4^n n!(n-1)!}.}$$