DM 08

BCPST Spé 2

Réponses

On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante :

une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{E}$ si :

$$a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3 = c_1+c_2+c_3 = a_1+b_1+c_1 = a_2+b_2+c_2 = a_3+b_3+c_3$$

On note $s(A)$ la valeur commune de ces six sommes.
On note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que I et J appartiennent à $\mathscr{E}$ et donner les valeurs $s(I)$ et $s(J)$.

RÉPONSE:

La somme des coefficients sur chacune des lignes et des colonnes de I vaut 1+0+0=1. Donc $I \in \mathscr{E}$ et $S(I) = 1$, la somme des coefficients sur chacune des colonnes et chacune des lignes de J vaut 3. Donc $J \in \mathscr{E}$ et $s(J) = 3$.

$$\boxed{I \text{ et } J \text{ appartiennent à } \mathscr{E} \text{ et } s(I) = 1,\ s(J) = 3}$$

*

2. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3.

RÉPONSE:

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ qui appartient à $\mathscr{E}$ donc telle que :

$$a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3 = c_1+c_2+c_3 = a_1+b_1+c_1 = a_2+b_2+c_2 = a_3+b_3+c_3$$

et soit Soit $A' = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix}$ qui appartient à $\mathscr{E}$ donc telle que :

$$a'_1+a'_2+a'_3 = b'_1+b'_2+b'_3 = c'_1+c'_2+c'_3 = a'_1+b'_1+c'_1 = a'_2+b'_2+c'_2 = a'_3+b'_3+c'_3$$

et λ un réel.

$$A+\lambda A' = \begin{pmatrix} a_1+\lambda a'_1 & a_2+\lambda a'_2 & a_3+\lambda a'_3 \\ b_1+\lambda b'_1 & b_2+\lambda b'_2 & b_3+\lambda b'_3 \\ c_1+\lambda c'_1 & c_2+\lambda c'_2 & c_3+\lambda c'_3 \end{pmatrix}$$

$$a_1+\lambda a'_1 + a_2+\lambda a'_2 + a_3+\lambda a'_3 = (a_1+a_2+a_3) + \lambda(a'_1+a'_2+a'_3)$$

$$b_1+\lambda b'_1 + b_2+\lambda b'_2 + b_3+\lambda b'_3 = (b_1+b_2+b_3) + \lambda(b'_1+b'_2+b'_3)$$

Comme $(a_1+a_2+a_3) = (b_1+b_2+b_3)$ et $(a'_1+a'_2+a'_3) = (b'_1+b'_2+b'_3)$, alors

$$a_1+\lambda a'_1 + a_2+\lambda a'_2 + a_3+\lambda a'_3 = b_1+\lambda b'_1 + b_2+\lambda b'_2 + b_3+\lambda b'_3$$

Les somme des coefficients sur chacune des deux premières lignes de $A+\lambda A'$ sont identiques.
On effectuerait de même les autres calculs pour démontrer que $\mathscr{E}$ est stable par combinaison linéaire.
De plus la somme des coefficients sur chacune des lignes et sur chacune des colonnes de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vaut 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{E}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathscr{E} \text{ est un sous espace vectoriel de l'ensemble de matrices carrées} \\ \text{à trois lignes et trois colonnes.} \end{array}}$$

*

3. Montrer que pour toutes matrices carrées d'ordre 3 M et N et pour tout réel λ
$$s(M+N) = s(M) + s(N) \qquad s(\lambda M) = \lambda s(M)$$

RÉPONSE:

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ qui appartient à $\mathscr{E}$

et soit Soit $A' = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix}$ qui appartient à $\mathscr{E}$ et λ un réel.

$$A + \lambda A' = \begin{pmatrix} a_1+\lambda a'_1 & a_2+\lambda a'_2 & a_3+\lambda a'_3 \\ b_1+\lambda b'_1 & b_2+\lambda b'_2 & b_3+\lambda b'_3 \\ c_1+\lambda c'_1 & c_2+\lambda c'_2 & c_3+\lambda c'_3 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} s(A+\lambda A') &= a_1 + \lambda a'_1 + a_2 + \lambda a'_2 + a_3 + \lambda a'_3 \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \lambda\left(a'_1 + a'_2 + a'_3\right) \\ &= s(A) + \lambda s(A') \end{aligned}$$

$$\boxed{s \text{ vérifie les deux propriétés}}$$

Remarque : On dira que s est une application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$.

*

4. Calculer l'image de s.

RÉPONSE:

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ qui appartient à $\mathscr{E}$

$s(A) = x \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3 = x$

Comme nous ne cherchons pas à résoudre le système mais à prouver l'existence d'au moins une solution, nous proposons de vérifier que

$$s\left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\right) = x \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} x/3 & x/3 & x/3 \\ x/3 & x/3 & x/3 \\ x/3 & x/3 & x/3 \end{pmatrix} \in \mathscr{E}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\, s = \mathbb{R}}$$

*

5. Soit a et b deux réels et K la matrice définie par : $K = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -2 & 5 & 3 \\ a & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels a et b pour que K soit une matrice de $\mathscr{E}$.

RÉPONSE:

$$K \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a+b & = -2+5+3 \\ a-6+5 & = -2+5+3 \\ 1-2+a & = -2+5+3 \\ a+5-6 & -2+5+3 \\ b+3+5 & = -2+5+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b & = 5 \\ a & = 7 \\ a & = 7 \\ a & = 7 \\ b & = -2 \end{cases}$$

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} a & = 7 \\ b & = -2 \end{cases}$$

$$\boxed{K \in \mathscr{E} \text{ si et seulement si } a = 7 \text{ et } b = -2}$$

*

6. Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & z & t \end{pmatrix}$. Déterminer x, y, z, t en fonction de a, b, c, d, e pour que M soit une matrice de $\mathscr{E}$.

RÉPONSE:

$$M = \begin{pmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d+x & = a+b+c \\ b+e+y & = a+b+c \\ c+z+t & = a+b+c \\ d+e+z & = a+b+c \\ x+y+t & = a+b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = b+c-d \\ y & = a+c-e \\ z+t & = a+b \\ z & = a+b+c-d-e \\ x+y+t & = a+b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = b+c-d \\ y & = a+c-e \\ t & = d+e-c \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ z & = a+b+c-d-e \\ x+y+t & = a+b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = b+c-d \\ y & = a+c-e \\ t & = d+e-c \\ z & = a+b+c-d-e \\ 0 & = 0 \qquad L_5 \leftarrow L_5 - L_1 - L_2 - L_3 \end{cases}$$

$$\boxed{M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = b+c-d \\ y & = a+c-e \\ t & = d+e-c \\ z & = a+b+c-d-e \end{cases}}$$

*

7. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.

 a) Calculer AJ et JA.

RÉPONSE:

$$\boxed{\begin{array}{l} AJ = \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 \\ y_1+y_2+y_3 & y_1+y_2+y_3 & y_1+y_2+y_3 \\ z_1+z_2+z_3 & z_1+z_2+z_3 & z_1+z_2+z_3 \end{pmatrix} \\ \text{et } JA = \begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 & x_2+y_2+z_2 & x_3+y_3+z_3 \\ x_1+y_1+z_1 & x_2+y_2+z_2 & x_3+y_3+z_3 \\ x_1+y_1+z_1 & x_2+y_2+z_2 & x_3+y_3+z_3 \end{pmatrix} \end{array}}$$

*

 b) Montrer que A appartient à $\mathscr{E}$ si, et seulement si, $AJ = JA$.

RÉPONSE:

$$AJ = JA \Leftrightarrow$$

$$\boxed{}$$

*

 c) Vérifier que si A appartient à $\mathscr{E}$, alors $AJ = s(A)J$.

RÉPONSE:

Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ on suppose que A appartient à $\mathscr{E}$ alors

$$x_1+x_2+x_3 = y_1+y_2+y_3 = z_1+z_2+z_3 = x_1+y_1+z_1 = x_2+y_2+z_2 = x_3+y_3+z_3 = s(A)$$

or

$$AJ = \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 \\ y_1+y_2+y_3 & y_1+y_2+y_3 & y_1+y_2+y_3 \\ z_1+z_2+z_3 & z_1+z_2+z_3 & z_1+z_2+z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \end{pmatrix} = s(A)J$$

$$\boxed{\text{Si } A \text{ appartient à } \mathscr{E} \text{ alors } AJ = s(A)J.}$$

*

8. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{E}$.

 a) Montrer que le produit AB appartient à $\mathscr{E}$.

RÉPONSE:

Remarque : a partir de maintenant, il faut le plus possible utiliser les questions précédentes plutôt que la définition de $\mathscr{E}$.
Soit A et B deux matrices appartenant à $\mathscr{E}$. alors

$$AJ = JA \qquad BJ = JB$$

$$\begin{aligned} (AB)J &= A(BJ) \\ &= A(JB) && \text{acr } B \in \mathscr{E} \\ &= (AJ)B \\ &= (JA)B && \text{car } A \in \mathscr{E} \\ &= J(AB) \end{aligned}$$

D'après la question 6a cela montre que

$$\boxed{AB \text{ appartient à } \mathscr{E}.}$$

*

b) Établir l'égalité : $s(AB) = s(A)S(B)$.

RÉPONSE:

Comme A, B et AB sont éléments de $\mathscr{E}$, en utilisant la question 6b.

$$AJ = s(A)J \qquad BJ = s(B)J \qquad ABJ = s(AB)J$$

donc en utilisant la deuxième égalité

$$\begin{aligned} s(AB)J &= ABJ && \text{troisième égalité} \\ &= A(BJ) \\ &= A(s(B)J) && \text{deuxième égalité} \\ &= s(B)(AJ) \\ &= s(B)(s(A)J) && \text{première égalité} \end{aligned}$$

On a donc

$$s(AB)J = s(A)s(B)J$$

comme J est non nulle

$$\boxed{s(AB) = s(A)s(B)}$$

*

9. Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathscr{E}$. On note A^{-1} la matrice inverse de A.

a) À l'aide de la question 7, montrer que A^{-1} appartient à $\mathscr{E}$.

RÉPONSE:

On sait que $AJ = JA$ (question 7b) donc en multipliant à gauche par A^{-1}

$$A^{-1}AJ = A^{-1}JA$$

donc

$$J = A^{-1}JA$$

donc en multipliant à droite par A^{-1}

$$JA^{-1} = A^{-1}JAA^{-1}$$

donc

$$JA^{-1} = A^{-1}J$$

en utilisant **l'équivalence logique prouvée dans la question 7b**

$$\boxed{A \text{ une matrice inversible appartenant à } \mathscr{E} \text{ alors } A^{-1} \text{ appartient à } \mathscr{E}.}$$

*

b) Montrer que $s(A) \neq 0$. Exprimer $s\left(A^{-1}\right)$ en fonction de $s(A)$.

RÉPONSE:

Da'près la question 8b et comme $A^{-1} \in \mathscr{E}$

$$AA^{-1} = I$$

donc

$$s(A)s(A^{-1}) = s(I) = 1$$

ce qui démontre

$$\boxed{s(A^{-1}) \neq 0 \text{ et } s(A^{-1}) = (s(A))^{-1}}$$

*

10. Soit A une matrice de $\mathscr{E}$. On pose $B = \dfrac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$.
On note $\mathscr{F}$ le sous-ensemble des matrices M de $\mathscr{E}$ vérifiant $s(M) = 0$.

a) Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{E}$

RÉPONSE:

On remqrque que

$$\mathscr{F} = \operatorname{Ker} s$$

donc d'après le cours

$$\boxed{\mathscr{F} \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathscr{E}.}$$

*

b) Montrer que B appartient à $\mathscr{E}$.

RÉPONSE:

Comme $J \in \mathscr{E}$ et en utilisant les premières questions

$$JJ = s(J)J = 3J$$

En utilisant la question 7b.

$$\begin{aligned} BJ &= \frac{1}{3}s(A)JJ \\ &= 3s(A)JJB & &= J\left(\frac{1}{3}s(A)J\right) \\ &= \frac{1}{3}s(A)JJ \\ &= 3s(A)J \end{aligned}$$

Donc

$$JB = BJ$$

$$\boxed{B \text{ appartient à } \mathscr{E}}$$

*

c) Montrer que : $BC = CB = 0$ (matrice nulle).

RÉPONSE:

$$\begin{aligned} BC &= \frac{1}{3}s(A)J\left(A - \frac{1}{3}s(A)J\right) \\ &= \frac{1}{3}s(A)JA - \left(\frac{1}{3}s(A)J\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}s(A)s(A)J - \left(\frac{1}{3}s(A)J\right)^2 & &\text{question 7c} \\ &= \frac{1}{3}s(A)^2J\left(\frac{1}{3}s(A)\right)^2 J^2 \\ &= \frac{1}{3}s(A)^2J\left(\frac{1}{3}s(A)\right)^2 s(J)J \\ &= \frac{1}{3}s(A)^2J\left(\frac{1}{3}s(A)\right)^2 s3J \\ &= 0 \end{aligned}$$

On montrerait de même l'autre égalité.

$$\boxed{BC = CB = 0}$$

*

d) En déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la formule : $(A-B)^n = A^n - B^n$.

RÉPONSE:

De la question précédente on en déduit

$$(A-B)B = 0$$

donc

$$AB = B^2$$

Une récuurence immédiate montre que

$$A^nB = B^{n+1}$$

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathscr{H}_n \ : (A-B)^n = A^n - B^n$$

- **Initialisation** : On a bien

$$(A-B)^1 = A_B = A^1 - B^1$$

- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que

$$(A-B)^n = A^n - B^n$$

alors

$$\begin{aligned} (A-B)^{n+1} &= (A-B)^n(A-B) \\ &= (A^n - B^n)(A-B) & &\text{H.R.} \\ &= A^n(A-B) - B^nC \\ &= A^n(A-B) - B^{n-1}BC \\ &= A^n(A-B) - B^{n-1}0 & &\text{question précédente} \\ &= A^{n+1} - A^nB \\ &= A^{n+1} - B^{n+1} & &\text{remarque précédente} \end{aligned}$$

- **Conclusion**

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ On a } (A-B)^n = A^n - B^n}$$

*

e) La matrice C appartient-elle à $\mathscr{F}$?

RÉPONSE:

Oui car $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel donc stable par addition

$$\boxed{C \in \mathscr{E}}$$

*

f) En déduire que toute matrice A de $\mathscr{E}$ peut s'écrire comme somme d'une matrice proportionnelle à J et d'une matrice de $\mathscr{F}$

RÉPONSE:

$$A = A - B + B$$

B est par définition proportionnelle à J.
de plus

$$\begin{aligned}
s(A-B) &= s(A) - s(B) && s \text{ est linéaire} \\
&= s(A) - s\left(\frac{1}{3}s(A)J\right) && \text{définition de } B \\
&= s(A) - \frac{1}{3}s(A)s(J) && s \text{ est linéaire} \\
&= s(A) - \frac{1}{3}s(A)3 && = 0
\end{aligned}$$

Donc $A - B$ appartient à $\mathscr{E}$.

$$\boxed{\text{Toute matrice } A \text{ de } \mathscr{E} \text{ peut s'écrire comme somme d'une matrice proportionnelle à } J \text{ et d'une matrice de } \mathscr{F}}$$

*