DM 10

à rendre le jeudi 21 décembre

OBLIGATOIRE

On note $E=\mathbb{R}_3[X]$ et

$$\psi: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & XP'(X+1) \end{array}$$

1. Vérifier que pour $P\in$ e, $\psi(P)\in E$.
2. Montrer que ψ est linéaire
3. Donner une base de Ker ψ et une base de Im , ψ
4. Donner une base de Ker ψ^2 et une base de Im ψ^2

FACULTATIF

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{A}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition de deux fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des applications $f\in\mathscr{A}$ admettant, pour tout entier naturel non nul n, une dérivée d'ordre n notée $f^{(n)}$ (ou f' pour $n=1$, et f'' pour $n=2,\ldots$).

1. (a) i. Montrer que $\mathscr{D}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
      ii. On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des applications de $\mathscr{A}$ définies par :
      $$f_{a,b}(x)=a\mathrm{e}^{2x}+b\mathrm{e}^{-2x}$$
      avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Établir que $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel de base $(f_{1,0};f_{0,1})$
      iii. Montrer que :
      $$\mathscr{E}=\left\{f\in\mathscr{D}/ \qquad (f''-4f=0\right\}$$
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, l'application ϕ_n dans $\mathscr{A}$ qui à $f_{a,b}\in\mathscr{E}$ associe $f_{a,b}^{(n)}$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$;
   (c) i. Montrer que $\mathscr{P}$, ensemble des fonctions paires de $\mathscr{E}$, et $\mathscr{J}$, ensemble des fonctions impaires de $\mathscr{E}$, sont deux droites vectorielles de $\mathscr{E}$ de base respective $f_{1,1}$ et $f_{1,-1}$
      ii. (Facultative) Montrer que ,pour tout fonction $f\in\mathscr{E}$ il existe un unique couple $f_p\in\mathrm{Vect}\left(f_{1,1}\right)$ et $f_I\in\mathrm{Vect}\left(f_{1,-1}\right)$ telles que $f=f_I+f_P$, on pourra raisonner par analyse synthèse.
      iii. Étudier les variations des fonctions $f_{1,1}$ et $f_{1,-1}$. Tracer leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Vérifier que $f_{1,-1}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; définir sa bijection réciproque.
2. On pose, pour f et g de $\mathscr{D}$:
   $$(f*g)(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$
   (a) i. Établir que :
      $$\forall (f,g,h)\in\mathscr{D}^3 \qquad (f+g)*h=(f*h)+(g*h)$$
      $$\forall \alpha\in\mathbb{R} \qquad \forall (f,g)\in\mathscr{D}^2 \qquad (\alpha f)*g=\alpha(f*g)$$
      ii. A étant l'élément de $\mathscr{D}$ défini par $A(x)=2x^2-1$, calculer $(f_{1,0}*A)(x)$ et $(f_{0,1}*A)(x)$. (on pourra intégrer par parties).
   (b) Déduire du 2a. que l'application
   $$\phi: \begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \to & \mathscr{A} \\ f & \mapsto & f*A \end{array}$$
   est linéaire et calculer Im ϕ