

DM 10

à rendre le jeudi 21 décembre

OBLIGATOIRE

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ et

$$\begin{aligned}\psi : E &\rightarrow E \\ P &\mapsto XP'(X+1)\end{aligned}$$

1. Vérifier que pour $P \in E$, $\psi(P) \in E$.

RÉPONSE:

Soit P un polynôme de degré au plus 3 alors P' est de degré au plus 2 donc par composition le degré de $P'(X+1)$ est au plus deux, donc par produit le degré de $XP'(X+1)$ est au plus 3

Pour $P \in E$, $\psi(P) \in E$.

*

2. Montrer que ψ est linéaire

RÉPONSE:

Soit P et Q deux polynômes de degré au plus 3 et λ un réel

$$\begin{aligned}\psi(P + \lambda Q) &= X(P + \lambda Q)'(X+1) \\ &= X(P' + \lambda Q')(X+1) \\ &= XP'(X+1) + \lambda XQ'(X+1) \\ &= \psi(P) + \lambda \psi(Q)\end{aligned}$$

L'application ψ est un endomorphisme de E .

*

3. Donner une base de $\text{Ker } \psi$ et une base de $\text{Im } \psi$

RÉPONSE:

Soit $P \in E$, on note $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ on a alors

$$P' = 3aX^2 + 2bX + c$$

$$P'(X+1) = 3a(X+1)^2 + 2bX + c = 3aX^2 + (6a+2b)X + 3a+2b+c$$

$$XP'(X+1) = 3aX^3 + (6a+2b)X^2 + (3a+2b+c)X$$

$$P \in \text{Ker } \psi \Leftrightarrow \psi(P) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3aX^3 + (6a+2b)X^2 + (3a+2b+c)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a &= 0 \\ 6a+2b &= 0 \\ 3a+2b+c &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = 0 \quad d \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ker } \psi = \mathbb{R}_0[X]$$

On peut aussi raisonner de façon plus abstraite, on commence par remarquer que si A et B sont deux polynômes

$$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

en effet $\deg(AB) = \deg A + \deg B$ donc cette somme peut être égale à $-\infty$ si et seulement si l'un des deux termes est nul

$$P \in \text{Ker } \psi \Leftrightarrow \psi(P) = 0$$

$$\Leftrightarrow XP'(X+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow P'(X+1) = 0$$

car $X \neq 0$ X n'est pas le polynôme nul

$$\Leftrightarrow P' = 0$$

$$\Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_0[X]$$

Pour calculer l'image on utilise le théorème du cours « l'image est engendré par l'image d'une base ». On choisit la base canonique

$$\text{Im } \psi = \text{Vect}(\psi(1), \psi(X), \psi(X^2), \psi(X^3))$$

$$= \text{Vect}(0, X, 2X(X+1), 3X(X+1)^2)$$

$$= \text{Vect}(X, X(X+1), X(X+1)^2)$$

on multiplie par des constantes non nulles, on enlève le vecteur nul

$$= \text{Vect}(X, X^2 + X, X^3 + 2X^2 + X)$$

$$= \text{Vect}(X, X^2, X^3 + 2X^2)$$

on retranche le premier vecteur aux autres

$$= \text{Vect}(X, X^2, X^3)$$

Cette famille est libre car c'est une sous famille de la base canonique

$$(X, X^2, X^3) \text{ est une base de } \text{Im } \psi$$

*

4. Donner une base de $\text{Ker } \psi^2$ et une base de $\text{Im } \psi^2$

RÉPONSE:

On commence par calculer une expression de ψ^2

$$\begin{aligned}\psi^2 : E &\rightarrow E \\ P &\mapsto XP'(X+1) + X^2 1P''(X+1)\end{aligned}$$

il peut être plus facile ici d'utiliser l'expression donnée par les coefficients de P

$$\begin{aligned}\psi^2 : E &\rightarrow E \\ aX^3 + bX^2 + cX + d &\mapsto 9aX^3 + (30a+4b)X^2 + (24a+6b+c)X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P \in \text{Ker } \psi^2 &\Leftrightarrow \psi^2(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow 9aX^3 + (30a+4b)X^2 + (24a+6b+c)X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 9a &= 0 \\ 30a+4b &= 0 \\ 24a+6b+c &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a=b=c=0 \quad d \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ker } \psi^2 = \mathbb{R}_0[X]}$$

$$\begin{aligned}\text{Im } \psi^2 &= \text{Vect}\left(\psi^2(1), \psi^2(X), \psi^2(X^2), \psi^2(X^3)\right) \\ &= \text{Vect}\left(0, X, 4X^2 + 5X, 9X^3 + 30X^2 + 24X\right) \\ &= \text{Vect}\left(X, 4X^2, 9X^3 + 30X^2\right) \\ &= \text{Vect}\left(X, X^2, 9X^3 + 30X^2\right) \\ &= \text{Vect}\left(X, X^2, 9X^3\right) \\ &= \text{Vect}\left(X, X^2, X^3\right)\end{aligned}$$

Cette famille est libre car c'est une sous famille de la base canonique

$$\boxed{(X, X^2, X^3) \text{ est une base de Im } \psi^2}$$

*

FACULTATIF

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{A}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition de deux fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des applications $f \in \mathcal{A}$ admettant, pour tout entier naturel non nul n , une dérivée d'ordre n notée $f^{(n)}$ (ou f' pour $n=1$, et f'' pour $n=2, \dots$).

1. (a) i. Montrer que $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

RÉPONSE:

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{D}$ et α et β deux réels.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors comme f et g sont dérivables n fois, c'est aussi le cas de $\alpha f + \beta g$ donc

$$\alpha f + \beta g \in \mathcal{D}$$

$\mathcal{D}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{A}$ et donc c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

*

- ii. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications de $\mathcal{A}$ définies par :

$$f_{a,b}(x) = ae^{2x} + be^{-2x}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Établir que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de base $(f_{1,0}; f_{0,1})$ tel que :

$$\forall f_{a,b} \in \mathcal{E} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (f''_{a,b} - 4f_{a,b})(x) = 0$$

RÉPONSE:

Tout élément de $\mathcal{E}$ est dérivable autant de fois que l'on veut. Donc

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$$

de plus la fonction nulle est la fonction $f_{0,0}$

Remarque : On propose ici une démonstration directe, mais il est plus rapide de constater que $\mathcal{E} = \text{Vect}(f_{0,1}, f_{1,0})$ Soit f et g deux éléments de $\mathcal{E}$, alors il existe a, b, a' et b' quatre réels tels que

$$f = f_{a,b} \quad g = f_{a',b'}$$

C'est à dire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f = ae^{2x} + be^{-2x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g = a'e^{2x} + b'e^{-2x}$$

Soit λ et μ deux réels, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lambda f(x) + \mu g(x) &= \lambda \left[ae^{2x} + be^{-2x} \right] + \mu \left[a'e^{2x} + b'e^{-2x} \right] \\ &= (\lambda a + \mu a')e^{2x} + (\lambda b + \mu b')e^{-2x}\end{aligned}$$

On vient donc de démontrer que

$$\lambda f_{a,b} + \mu f_{a',b'} = f_{\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b'}$$

ou autrement dit

$$\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}$$

donc

$\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{D}$ donc un espace vectoriel .

On constate que

$$\begin{array}{ccc} f_{1,0} : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{2x} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f_{0,1} : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-2x} \end{array}$$

Soit $f \in \mathcal{E}$ alors il existe deux réels a et b tels que

$$\begin{aligned} f(x) &= f_{a,b}(x) = ae^{2x} + be^{-2x} \\ &= af_{1,0}(x) + bf_{0,1}(x) \end{aligned}$$

Nous venons de démontrer que

$$f_{a,b} = af_{1,0} + bf_{0,1}$$

et donc

$$\mathcal{E} \subset \text{Vect}(f_{1,0}, f_{0,1})$$

($f_{1,0}, f_{0,1}$ sont bien des éléments de $\mathcal{E}$).

L'autre inclusion est évidente

$(f_{1,0}, f_{0,1})$ est une famille génératrice de $\mathcal{E}$

Soit λ et μ deux réels, on suppose que

$$\lambda f_{1,0} + \mu f_{0,1} = 0$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x} = 0$$

On a alors pour $x=0$ et $x=1$

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda e + \mu e^{-1} &= 0 \end{cases}$$

Ce qui, après résolution, donne $\lambda = \mu = 0$ ce qui démontre que la famille $(f_{1,0}, f_{0,1})$ est libre .

Et donc

$(f_{1,0}, f_{0,1})$ est une base de $\mathcal{E}$.-

Soit $f \in \mathcal{E}$ alors il existe a et b des réels tels que

$$f = f_{a,b}$$

f est dérivable autant de fois que l'on veut comme somme de deux exponentielles et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) &= ae^{2x} + be^{-2x} \\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) &= 2ae^{2x} - 2be^{-2x} \\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) &= 4ae^{2x} + 4be^{-2x} \end{aligned}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = 4f(x)$$

Pour tout $f_{a,b} \in \mathcal{E}$ on a $\forall x \in \mathbb{R} \qquad (f''_{a,b} - 4f_{a,b})(x) = 0$

*

- (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , l'application ϕ_n dans $\mathcal{A}$ qui à $f_{a,b} \in \mathcal{E}$ associe $f_{a,b}^{(n)}$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$;

RÉPONSE:

Commençons par démontrer que ϕ_1 est un endomorphisme.

Soit $f \in \mathcal{E}$, alors il existe a et b deux réels tels que

$$\begin{array}{ccc} f = f_{a,b} & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ae^{2x} + be^{-2x} \end{array}$$

Cette application est bien dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 2ae^{2x} - 2be^{-2x} = f_{2a,-2b}(x)$$

On a donc démontré que

$$\forall f \in \mathcal{E} \qquad \phi_1(f) \in \mathcal{E}$$

Donc

$$\phi_1 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

est bien définie.

De plus comme la dérivation est une opération linéaire

$$\phi_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$$

On constate de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_n = \phi_1^n$$

où la puissance représente la composition itérée n fois. Comme la composée de deux endomorphisme est un endomorphisme, on a (récurrence immédiate)

Pour tout entier naturel non nul n , l'application ϕ_n est un endomorphisme de $\mathcal{E}$

*

- (c) i. Montrer que $\mathcal{P}$, ensemble des fonctions paires de $\mathcal{E}$, et $\mathcal{J}$, ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{E}$, sont deux droites vectorielles de $\mathcal{E}$ de base respective $f_{1,1}$ et $f_{1,-1}$

RÉPONSE:

Soit $f \in \mathcal{P}$, alors il existe a et b deux réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = ae^{2x} + be^{-2x}$$

comme on a supposé que f est paire

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad ae^{-2x} + be^{2x} = f(-x) = ae^{2x} + be^{-2x}$$

Or comme la famille $(f_{1,0}, f_{1,0})$ est libre

$$a = b \qquad \text{et} \qquad b = a$$

Donc, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = a(e^{2x} + e^{-2x}) = af_{1,1}(x)$$

Nous venons de démontrer que

$$\mathcal{P} \subset \text{Vect}(f_{1,1})$$

Comme $f_{1,1}$ est bien une fonction paire

$$\text{Vect}(f_{1,1}) \subset \mathcal{P}$$

et donc

$\text{Vect}(f_{1,1}) = \mathcal{P}$

Une famille constitué d'un vecteur non nul est toujours libre
Soit $f \in \mathcal{J}$, alors il existe a et b deux réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = ae^{2x} + be^{-2x}$$

comme on a supposé que f est impaire

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad ae^{-2x} + be^{2x} = f(-x) = -ae^{2x} - be^{-2x}$$

Or comme la famille $(f_{1,0}, f_{1,0})$ est libre

$$a = -b \qquad \text{et} \qquad b = -a$$

Donc, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = a \left(e^{2x} - e^{-2x} \right) = af_{1,-1}(x)$$

Nous venons de démontrer que

$$\mathcal{J} \subset \text{Vect} \left(f_{1,-1} \right)$$

Comme $f_{1,-1}$ est bien une fonction impaire

$$\text{Vect} \left(f_{1,-1} \right) \subset \mathcal{J}$$

et donc

Vect $\left(f_{1,-1} \right) = \mathcal{J}$

*

- ii. (Facultative) Montrer que ,pour tout fonction $f \in \mathcal{E}$ il existe un unique couple $f_p \in \text{Vect} \left(f_{1,1} \right)$ et $f_I \in \text{Vect} \left(f_{1,-1} \right)$ telles que $f = f_I + f_p$, on pourra raisonner par analyse synthèse.

RÉPONSE:

Analyse Soit $f \in \mathcal{E}$, il existe alors a et b des réels tels

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = ae^{2x} + be^{-2x}$$

supposons qu'il existe $f_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}$ et $f_{\mathcal{J}} \in \mathcal{J}$ telles que

$$f = f_{\mathcal{D}} + f_{\mathcal{J}}$$

Alors, pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f_{\mathcal{D}}(x) + f_{\mathcal{J}}(x)$$

et d'après les parités

$$f(-x) = f_{\mathcal{D}}(x) - f_{\mathcal{J}}(x)$$

On en déduit donc que

$$f_{\mathcal{D}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{a+b}{2}e^{2x} + \frac{a+b}{2}e^{-2x}$$

et

$$f_{\mathcal{J}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{a-b}{2}e^{2x} + \frac{b-a}{2}e^{-2x}$$

Synthèse On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_{\mathcal{D}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{a+b}{2}e^{2x} + \frac{a+b}{2}e^{-2x}$$

et

$$f_{\mathcal{J}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{a-b}{2}e^{2x} + \frac{b-a}{2}e^{-2x}$$

Par définition, $f_{\mathcal{D}}$ et $f_{\mathcal{J}}$ sont deux éléments de $\mathcal{E}$, de plus on vérifie aisément que $f_{\mathcal{D}}$ est paire, $f_{\mathcal{J}}$ est impaire et

$$f = f_{\mathcal{D}} + f_{\mathcal{J}}$$

*

- iii. Étudier les variations des fonctions $f_{1,1}$ et $f_{1,-1}$. Tracer leurs courbes représentatives dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé. Vérifier que $f_{1,-1}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; définir sa bijection réciproque.

RÉPONSE:

$$\begin{array}{ccc} f_{1,-1} : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{2x} - e^{-2x} \end{array}$$

Or $x \mapsto e^{2x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-2x}$ est strictiment décroissante sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto -e^{-2x}$ y est strictement croissante et donc par somme $f_{1,-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de $f_{1,-1}$			

$f_{1,1}$ est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'_{1,1}(x) = 2f'_{1,-1}(x)$$

Du tableau des variations de $f_{1,-1}$, on en déduit

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f_{1,-1}(x)$	$-$	0	$+$
variations de $f_{1,1}$			

Courbes de $f_{1,1}$ et $f_{1,-1}$

*

2. On pose, pour f et g de $\mathcal{D}$:

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t) dt$$

(a) i. Établir que :

$$\begin{aligned} \forall (f, g, h) \in \mathcal{D}^3 \quad (f+g) * h &= (f * h) + (g * h) \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall (f, g) \in \mathcal{D}^2 \quad (\alpha f) * g &= \alpha(f * g) \end{aligned}$$

RÉPONSE:

Soit f , g et h trois fonctions de $\mathcal{D}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (f+g) * h(x) &= \int_0^x (f+g)(t)h(x-t) dt \\ &= \int_0^x f(t)h(x-t) + g(t)h(x-t) dt \\ &= \int_0^x f(t)h(x-t) dt + \int_0^x g(t)h(x-t) dt \\ &= f * h(x) + g * h(x) \end{aligned}$$

Pour tout f , g et h de $\mathcal{D}$ on a $(f+g) * h = (f * h) + (g * h)$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f , g deux éléments de $\mathcal{D}$.
Alors, pour $x \in \mathbb{R}$

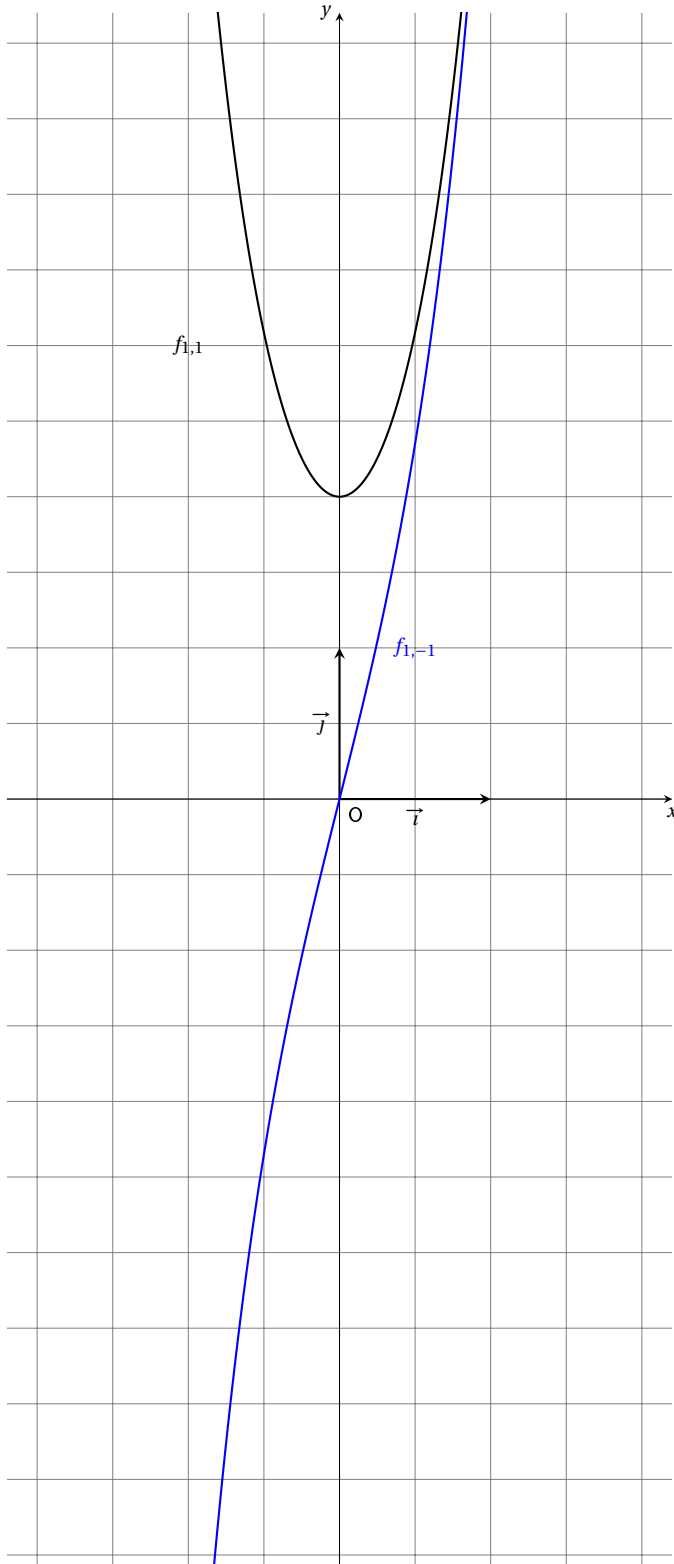
$$\begin{aligned} (\alpha f) * g(x) &= \int_0^x (\alpha f)(t)g(x-t) dt \\ &= \alpha \int_0^x f(t)g(x-t) dt \\ &= \alpha(f * g)(x) \end{aligned}$$

Pour tout f et g de $\mathcal{D}$ et tout réel α on a $(\alpha f) * g = \alpha(f * g)$.

*

ii. A étant l'élément de $\mathcal{D}$ défini par $A(x) = 2x^2 - 1$, calculer $(f_{1,0} * A)(x)$ et $(f_{0,1} * A)(x)$. (on pourra intégrer par parties).

RÉPONSE:



Soit $x \in \mathbb{R}$, les fonctions considérées étant continues

$$\begin{aligned}(f_{1,0} * A)(x) &= \int_0^x f_{1,0}(t)(2(x-t)^2 - 1) \, dt \\ &= \int_0^x e^{2t}(2(x-t)^2 - 1) \, dt \\ &= \int_0^x e^{2t} \left[2(x^2 - 2xt + t^2) - 1 \right] \, dt \\ &= 2x^2 \int_0^x e^{2t} \, dt - 4x \int_0^x e^{2t} t \, dt + \int_0^x 2t^2 e^{2t} \, dt - \int_0^x e^{2t} \, dt \\ &= x^2 \left[e^{2t} \right]_0^x - 4x \int_0^x e^{2t} t \, dt + 2 \int_0^x t^2 e^{2t} \, dt - \left[\frac{e^{2t}}{2} \right]_0^x\end{aligned}$$

On pose pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}u(t) &= t & u'(t) &= 1 \\ v'(t) &= e^{2t} & v(t) &= \frac{e^{2t}}{2}\end{aligned}$$

u et v sont dérivables à dérivées continues, donc, par intégrations par parties

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{2t} t \, dt &= \int_0^x v'(t) u(t) \, dt \\ &= [v(t) u(t)]_0^x - \int_0^x v(t) u'(t) \, dt \\ &= \left[\frac{te^{2t}}{2} \right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{2t}}{2} \, dt \\ &= \left[\frac{te^{2t}}{2} \right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{2t}}{2} \, dt \\ &= \frac{xe^{2x}}{2} - \left[\frac{e^{2t}}{4} \right]_0^x \\ &= \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

...

Pour tout $x \in \mathbb{R} \quad (f_{1,0} * A)(x) = -x^2 - x$ et $(f_{0,1} * A)(x) = x^2 - x$

*

(b) Dédurre du 2a. que l'application

$$\begin{aligned}\phi : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{A} \\ f &\mapsto f * A\end{aligned}$$

est linéaire et que l'image $\phi(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$ par ϕ est un espace vectoriel dont on précisera une base.

RÉPONSE:

La linéarité de ϕ découle directement des questions précédentes.
On sait de plus que d'après un résitat du cours

$$\phi(\mathcal{E}) = \text{Vect} \left(\phi(f_{1,0}), \phi(f_{0,1}) \right)$$

car $(f_{1,0}, f_{0,1})$ est une famille génératrice de $\mathcal{E}$ Or les fonctions $x \mapsto -x^2 - x$ et $x \mapsto x^2 - x$ ne sont pas proportionnelles, donc

$$(x \mapsto -x^2 - x, x \mapsto x^2 - x) \text{ est une famille libre}$$

$(x \mapsto -x^2 - x, x \mapsto x^2 - x)$ forment une base du sous-espace vectoriel $\phi(\mathcal{E})$.

*