DM 11

BCPST Spé 2

à rendre le lundi 8 janvier

EXERCICE 1

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

Partie A : Étude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$Q(X) = (X-1)P'(X) + P(X)$$

et $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$P_0(X) = 1,\ P_1(X) = X \text{ et } P_2(X) = X^2$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Vérifier que la matrice A de f dans $\mathscr{B}$, s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies par :

$$R_0(X) = 1,\ R_1(X) = X-1 \text{ et } R_2(X) = (X-1)^2$$

4. Montrer que $\mathscr{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de E. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathscr{B}'$.
5. Vérifier que :

$$\begin{cases} R_2 x + 2R_1(X) + R_0(X) = P_2(X) \\ R_1(X) + R_0(X) = P_1(X) \end{cases}$$

   En déduire la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$

6. Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1}. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$$

   et expliciter la troisième colonne de la matrice $\left[A^{-1}\right]^n$

Partie B Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.
On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{ème}$ épreuve ($k \geq 0$)

On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_k = 0) \\ \mathrm{P}(X_k = 1) \\ \mathrm{P}(X_k = 2) \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{P}\left[X_k = j\right]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{ème}$ épreuve.

On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi de X_2 Calculer l'espérance et la variance de X_2
2. Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier naturel k :

$$U_{k+1} = A^{-1} U_k$$

3. Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0
4. Pour tout k de $\mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{P}(X_k = 0) = 1, \quad \lim_{k\to+\infty} \mathrm{P}(X_k = 1) = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \mathrm{P}(X_k = 2) = 0$$

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, on notera $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.
2. La matrice A est-elle inversible ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1;1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

3. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1;1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
4. Citer la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, et **calculer** un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

5. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.
6. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(I + \frac{1}{2}C + \alpha C^2)^2 = A$.
   Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1,0,1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$
   (a) Calculer les vecteurs v et u.
   (b) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.
8. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme :
   $$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$
   où a, b et c sont trois réels.
   (b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.
9. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.
10. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?