DM 02 fonctions de deux variables

BCPST SPé 2

à rendre le jeudi 14 septembre 2023

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x, y) \in]0; +\infty[\times]0; +\infty[, \quad f(x, y) = \mathrm{e}^{x+4y} \ln(xy)$$

On admet que l'ensemble de définition de f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Etude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que :
$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$
6. Proposer un programme en python permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}. On utilisera le procédé de dichotomie.

Points critiques de f sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x, et y strictement positifs
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4f(x, y) + \frac{1}{y}\mathrm{e}^{x+4y} \end{cases}$$
3. Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.
4. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ et établir que :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = 16\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \frac{4}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \end{cases}$$