Intégration

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Janvier 2024

Table des matières

Dans toute la suite les fonctions sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I Définitions et propriétés

I.1 Premières définitions

Définition 1 (Intégrale impropre ou généralisée en b.)**.**
Soit f une fonction continue sur $[a; b[$, avec a un réel et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge *si et seulement si la limite*

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \textit{ existe et est réelle.}$$

On note alors

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ldots$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale diverge.

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ diverge et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Définition 2 (Nature d'une intégrale)**.**
Déterminer la nature *d'une intégrale c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.*

Notations On pourra utiliser les notations

$$\int_a^b f \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_I f \qquad \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$$

Attention : cette notation désigne la valeur de l'intégrale si elle converge, mais on peut aussi écrire $\int_I f$ diverge.

Proposition 1 (Prolongement par continuité)**.**
Si f est continue sur $[a; b]$ alors $\int_{[a;b[} f$ converge et

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b[} f$$

Proposition 2 (Choix de la borne a)**.**
Soit f une fonction continue sur $[a; b[$ et $a' \in [a; b[$ alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \textit{ converge si et seulement si } \int_{a'}^b f(t)\,\mathrm{d}t \textit{ converge}$$

Attention : Les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{a'}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ partagent la même nature mais pas la même valeur.

I.2 Extension à un intervalle du type $]a; b]$ ou $]a; b[$.

Définition 3 (Intégrale sur un intervalle $]a; b]$).

Soit f une fonction continue sur $[a; b[$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge *si et seulement si la limite*

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

existe et est réelle.
On note alors :

$$= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale diverge.

Exercice 1.
Montrer que

- $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t/t$ diverge
- $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t/\sqrt{t}$ converge.

Définition 4 (Intégrale sur un intervalle $]a; b[$).
Soit f une fonction continue sur $]a; b[$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $c \in]a; b[$.
On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge *si et seulement si les intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et dans ce cas on pose*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale diverge.

C'est à dire si au moins l'une des deux intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge

Proposition 3 (Indifférence au point de découpage, Chasles).
La nature et la valeur de l'intégrale $\int_a^b f$ ne dépend pas du choix du point c.

Démonstration :

Exercice : En choisissant bien le point de découpage calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-1|}\,\mathrm{d}t$$

Définition 5 (Cas d'une fonction définie sur un intervalle et continue sur intervalle sauf éventuellement en un nombre fini de points)**.**
Dans ce cas là on étudie la convergence de l'intégrale sur chacun des intervalles où f est continue et en cas de convergence on somme chacune des intégrales

Exemple : Calculons l'intégrale sur $[-1;1]$ de $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Théorème 1 (Intégrale Gaussienne)**.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

I.3 Extension des opérations vues en première année

Dans la suite I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition 4 (Linéarité)**.**
Soit f et g deux fonctions continues sur I et telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent et λ un réel alors $\int_I f + \lambda g$ converge et

$$\int_I (f+\lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g$$

Démonstration :

Proposition 5 (Positivité et croissance)**.**
Soit f et g deux fonctions continues sur I et telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent.

Positivité *On suppose de plus que f est à valeurs positives* i.e. $\forall x \in I\ f(x) \geqslant 0$, *alors*

$$\int_I f \geqslant 0$$

Stricte positivité *On suppose de plus que f est positive et non nulle c'est à dire*
alors

$$\int_I f > 0$$

Croissance *On suppose de plus que $f \geqslant g$* i.e. *, alors*

$$\int_I f \geqslant \int_I g$$

Démonstration :

Théorème 2 (Intégration par parties)**.**
Soit f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a;b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose que fg admet une limite réelle en a et b alors

- *Les intégrales $\int_{]a;b[} f'g$ et $\int_{]a;b[} fg'$ ont même nature.*
- *En cas de convergence*

$$\int_{]a;b[} f'g = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)g(x) - \lim_{\substack{x\to b\\ x>a}} f(x)g(x) - \int_{]a;b[} fg'$$

Ce que l'on peut écrire

$$\int_{]a;b[} f'g = [fg]_a^b - \lim_{\substack{x\to b\\ x>a}} f(x)g(x) - \int_{]a;b[} fg'$$

Remarque : Grace à la proposition 1 , on peut fermer l'une des deux bornes.

Théorème 3 (Changement de variable)**.**
Si la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et strictement monotone sur un intervalle d'extrémités a et b ayant des limites $\alpha = \lim_a \varphi$ et $\beta = \lim_b \varphi$ et si f est continue sur l'intervalle d'extrémités α et β, alors les intégrales $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et ont la même valeur lorsqu'elles convergent.

φ induit une bijection de $]a;b[$ dans $]\alpha;\beta[$

Démonstration :

Exemple : Calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

I.4 Fonctions paires et impaires

On donne les résultats pour des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, ils peuvent être adaptés à d'autres cas.

Proposition 6 (Fonction paire)**.**
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et paire, alors les intégrales $\int_{\mathbb{R}} f$, $\int_{\mathbb{R}_+} f$ et $\int_{\mathbb{R}_-} f$ ont même nature, et en cas de convergence

$$\int_{\mathbb{R}} f = 2\int_{\mathbb{R}_+} f \qquad \textit{et} \qquad \int_{\mathbb{R}_+} f = \int_{\mathbb{R}_-} f$$

Démonstration :

Proposition 7 (Fonction impaire)**.**
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire, alors les intégrales $\int_{\mathbb{R}} f$ et $\int_{\mathbb{R}_+} f$ ont même nature, et en cas de convergence

$$\int_{\mathbb{R}_-} f = \int_{\mathbb{R}_+} f \qquad \textit{et} \qquad \int_{\mathbb{R}} f = 0$$

Démonstration :

I.5 Convergence absolue

Définition 6 (Convergence absolue)**.**
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I on dit que l'intégrale $\int_I f$ converge absolument *si et seulement si l'intégrale*

converge.

Théorème 4 (Lien entre convergence absolue et convergence)**.**
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I on suppose que l'intégrale $\int_I f$ converge absolument *alors cette intégrale converge. On a de plus*

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$$

II Intégrales de fonctions positives, critères de convergence

Les deux théorèmes suivants vont nous servir toutes l'année !
Attention : Il est indispensable de vérifier que les fonctions étudiées sont à valeurs positives et de le faire apparaître clairement dans vos réponses.

Théorème 5 (Théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions à valeurs positives : cas des inégalités)**.**
Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b[$ avec b un réel ou $+\infty$, et $a < b$ et telles que

$$\forall t \in [a; b[\qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$$

Dans ce cas là

- *Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi.*
- *Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi.*

Ce théorème s'adapte aux autres cas d'intégrales impropres.

Démonstration :

Théorème 6 (Théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions à valeurs positives : cas de la relation d'équivalence)**.**
Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b[$ avec b un réel ou $+\infty$, et $a < b$ et telles que

$$\forall t \in [a; b[\qquad 0 \leqslant f(t) \qquad \textit{et} \qquad 0 \leqslant g(t)$$

On suppose de plus que

$$f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$$

Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature.

Ce théorème s'adapte aussi aux autres cas d'intégrales impropres.

Démonstration :

Autres cas

Lorsqu'une intégrale est impropre en plus d'un point il faut « découper »cette intégrale.

Exemple :

- Pour étudier la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, il faut étudier les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

- Pour étudier la nature de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x+1)x(x-1)}\,\mathrm{d}x$, il faut étudier les intégrales $\displaystyle\int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{(x+1)x(x-1)}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{1}{(x+1)x(x-1)}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{1}{(x+1)x(x-1)}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1}{(x+1)x(x-1)}\,\mathrm{d}x$

Savoir et Savoir-faire

À la fin de ce cours vous devez savoir

Étudiez par le calcul les convergences des intégrales classiques Riemann, exponentielles.

Démontrer une convergence en utilisant les relations de comparaisons $\sim$ et $\leqslant$.

Calculer une intégrale impropre en utilisant les techniques IPP et changement de variable. On fera bien attention à la rédaction.