INTÉGRATION

Calculs

Exercice 1.
En calculant des primitives déterminer si les intégrales suivantes convergent et si oui donner leurs valeurs.

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln t \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2 (Intégrales classiques, À savoir faire)**.**

- **Intégrales de Riemann**. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$
- **Intégrales de Riemann**. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$
- **Exponentielles**.
  Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$

Exercice 3.
En utilisant des changement de variables ou des IPP déterminer si les intégrales suivantes convergent et si oui donner leurs valeurs.

1. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3-t}}$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t}$ (IPP)
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^t}$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ (IPP)

Exercice 4 (Fraction rationnelle)**.**

1. Trouver deux constantes a et b telles que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$
2. Pour chacune des intégrales suivantes dire si elle converge ou non, dans le cas convergent, donner la valeur de l'intégrale.
   (a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$
   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$
   (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$

Exercice 5 (Bien choisir le découpage)**.**
Prouver la convergence des intégrales suivantes et calculer leur valeur.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-|t-1|}$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-a|}$ où a est une constante.

Exercice 6 (⚠Sommes de Riemann)**.**
On rappelle

Si f est une fonction continue sur le segment $[a;b]$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Calculer les limites des suites suivantes en faisant apparaître des sommes de Riemann

1. $\displaystyle u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-k/n}$
2. $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n^3}}$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle S_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$ (commencer par un changement d'indice)
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n} (n+k)^{\frac{1}{n}}$ passer au ln.
6. $\displaystyle S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$

Théorèmes de comparaisons

Exercice 7.
Les intégrales suivantes sont elles convergentes ? On pourra utiliser les résultats de l'exercice 2

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x}}$: utiliser $\leqslant$ ou $\sim$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x}}$: utiliser $\sim$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x}}$: $\leqslant$ ou $\sim$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\sqrt{x}}$: utiliser $\leqslant$ ou $\sim$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}+x}{x^3+x^2+x}\,\mathrm{d}x$: utiliser $\sim$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$

Exercice 8.
Les intégrales suivantes sont elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$

Exercice 9 (Plus dur)**.**
Étudier la nature des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$

Exercice 10.
Les intégrales suivantes sont elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)+x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)\,(1+x)}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1-\sqrt{t}}$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-t}}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 11.
Pour chacune des intégrales suivantes étudier si elle converge ou non.

1. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$

Mélangés

Exercice 12 (Calculs)**.**
Calculer, si elles convergent les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\int_0^1 \dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 13 (⚠Une récurrence)**.**
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose si l'intégrale converge

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer I_0.
2. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{(\ln t)^n}{t^2}\left(\dfrac{1}{t\sqrt{t}}\right) = 0$.
3. En déduire qu'il existe un réel A tel que
$$\forall x\in[A;+\infty[\qquad \frac{(\ln t)^n}{t^2} \leqslant \left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)$$
4. En déduire que les intégrales sont convergentes.
5. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour $n\in\mathbb{N}$
$$I_{n+1} = (n+1)I_n$$
6. En déduire une expression de I_n en fonction de n.
7. Trouver la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14.
On cherche à déterminer si l'intégrale suivante converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(2+x)(3+x)}$$

1. Trouver un équivalent simple de la fonction en $+\infty$.
2. En déduire que l'intégrale converge.
3. Trouver trois constantes a, b et c telles que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$
$$\frac{1}{(1+x)(2+x)(3+x)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x+3}$$
4. En déduire la valeur de l'intégrale

Exercice 15 (Changement de variable)**.** 1. Montrer que pour $t\in[0;+\infty[$, $\ln t \leqslant \sqrt{t}$

2. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ converge.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ converge.
4. En utilisant le changement de variables $u=1/t$, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = 0$.
5. Soit $a>0$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt$.

Pour aller plus loin

Exercice 16.
Étudier la convergence des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}$

Exercice 17 (Intégrales à paramètres (dur et long)).
Étudiez la convergence des intégrales suivantes en fonction du ou des paramètres :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ où $m \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1+x^\beta\right)\mathrm{d}x$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 18 (Un calcul un peu compliqué mais détaillé).
On pose

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\ln x} & \text{si } x \in \,]0;1[\\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.
2. $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est elle convergente?
3. Soit $x \in \,]0;1[$. En posant $u = t^2$, montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}u}{\ln u}$.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$
5. Montrer que pour tout $t \in \left[x^2;x\right]$, on a
$$\frac{x}{t\ln t} \leqslant \frac{t}{t\ln t} \leqslant \frac{x^2}{t\ln t}$$
6. En déduire que
$$x^2\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant x\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$
7. Trouver une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$
8. En utilisant le théorème des gendarmes montrer que
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \ln 2$$

Exercice 19.
Soient $0 < a < b$.

1. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Soient $0 < x < y$. Démontrer que
$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$
3. Démontrer que, pour tout réel $z > 0$,
$$\mathrm{e}^{-bz}\ln\frac{b}{a} \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-az}\ln\frac{b}{a}.$$
En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt = \ln\frac{b}{a}$$

Exercice 20.

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x$. On pourra comparer avec $\frac{1}{x^\alpha}$ pour α bien choisi.
2. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de
$$\ln\left(x+\sqrt{x}\right) - \ln(x)$$
3. En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln(x)}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x$.
4. Donner un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\ln\left(x+\sqrt{x}\right) - \ln(x)$. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln(x)}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 21 (Logarithme à la puissance n).
Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.