

APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans tout ce TD la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Généralités

Exercice 1 (Polynômes).

Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

$$\begin{aligned} 1. f_1 : \mathbb{K}_2[X] &\rightarrow \mathbb{K}^3 \\ P &\mapsto (P(0), P(1), P(2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. f_2 : \mathbb{K}_2[X] &\rightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P &\mapsto P(X+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. f_3 : \mathbb{K}_3[X] &\rightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. f_4 : \mathbb{K}_3[X] &\rightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. f_5 : \mathbb{K}_2[X] &\rightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P &\mapsto P'(2X+1) + P(3X-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. f_6 : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \int_0^1 P(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. f_7 : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto X^2 \int_0^1 P(t) dt + X \int_{-1}^1 P(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. f_8 : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow ? \\ P &\mapsto \int_0^1 P(X+t) dt \end{aligned}$$

Exercice 2 (Matrice).

On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et A une matrice carrée d'ordre n fixée. Les application suivantes sont elle linéaires?

$$\begin{aligned} 1. f_1 : E &\rightarrow E \\ M &\mapsto M + M^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. f_2 : E &\rightarrow E \\ M &\mapsto M^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. f_3 : E &\rightarrow E \\ M &\mapsto AM \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. f_4 : E &\rightarrow E \\ M &\mapsto A^2 M \end{aligned}$$

Exercice 3 (Fonctions).

On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les application suivantes sont elle linéaires?

$$\begin{aligned} 1. \varphi_1 : E &\rightarrow E \\ f &\mapsto f' + f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \varphi_2 : E &\rightarrow E \\ f &\mapsto x \mapsto f(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \varphi_3 : E &\rightarrow E \\ f &\mapsto f(0)f' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \varphi_4 : E &\rightarrow E \\ f &\mapsto x \mapsto \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

Exercice 4 ($\blacktriangle$).

Soit E_1, E_2, F_1 et F_2 des $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- On munit $E_1 \times E_2$ des opérations naturelles (?) démontrer rapidement que $E_1 \times E_2$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

- Soit $f_1 \in L(E_1, F_1)$ et $f_2 \in L(E_2, F_2)$ On pose

$$\begin{aligned} \varphi : E_1 \times E_2 &\rightarrow F_1 \times F_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{aligned}$$

Montrer que $\varphi \in L(?, ?)$.

- Soit $g_1 \in L(E_1, F_1)$ et $g_2 \in L(E_2, F_1)$ on définit

$$\begin{aligned} \psi : E_1 \times E_2 &\rightarrow ? \\ (x_1, x_2) &\mapsto g_1(x_1) + g_2(x_2) \end{aligned}$$

Montrer que $\psi \in L(?, ?)$.

- Soit $h_1 \in L(E, F_1)$ et $h_2 \in L(E, F_2)$ on note

$$\begin{aligned} \zeta : E &\rightarrow F_1 \times F_2 \\ u &\mapsto (h_1(u), h_2(u)) \end{aligned}$$

Noyau et image

Exercice 5 (Calcul de noyau : polynôme).

Calculer les noyaux des fonctions linéaires de l'exercice 1

Exercice 6 (Calcul de noyaux : ensembles de matrices).

Montrer que les applications suivantes sont linéaires et calculer leur noyau

$$\begin{aligned} 1. f : \mathcal{M}_2 &\rightarrow \mathcal{M}_2 \\ M &\mapsto M + 2M^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. f : \mathcal{M}_2 &\rightarrow \mathcal{M}_2 \\ M &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} M \end{aligned}$$

Exercice 7 (Noyaux emboîtés).

Soit φ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On note $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.

- Montrer que $\text{Im } \varphi^2 \subset \text{Im } \varphi$.
- Montrer que $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \varphi^2$

$$\begin{aligned} 3. \text{ On pose } \Delta : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

- Calculer $\text{Ker } \Delta$, $\text{Ker } \Delta^2$
- Conclure qu'il n'y a pas égalité entre ces deux ensembles
- Faire de même avec les images.

Exercice 8 ($\blacktriangle$).

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_n[X] &\rightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X) \end{aligned}$$

- Montrer que φ est un endomorphisme. (ne pas oublier de vérifier que φ est bien définie)
- Calculer le noyau de φ , on pourra commencer par montrer q'un polynôme du noyau vérifie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $P(n) = P(0)$

3. Calculer sont son image
4. On remplace l'ensemble de départ et d'arrivée par $\mathbb{K}[X]$. Reprendre les questions précédentes

Exercice 9 (Équation différentielle).

On note E l'ensemble des fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

1. On pose φ la fonction de E dans E telle que $\varphi(f)$ est la fonction définie par $x \mapsto f'(x) - xf(x)$
 - (a) Montrer que φ est linéaire
 - (b) Donner une base de $\text{Ker } \varphi$
 - (c) φ est elle surjective?
2. On pose ψ la fonction de E dans E telle que $\psi(f) = f'' + af' + bf$
 - (a) Montrer que ψ est linéaire
 - (b) Donner une base de $\text{Ker } \psi$

Exercice 10 (▲ Produit cartésien).

On reprend les notations de l'exercice 4.

1. Calculer l'image et le noyau de ϕ .
2. Calculer le noyau de ζ

Applications linéaires, représentation matricielle dans les bases canoniques

Exercice 11.

Soit l'application linéaire :

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x - y + z, x - y). \end{aligned}$$

1. Écrire la matrice de l'application f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Même question avec l'application linéaire g définie par :

$$\begin{aligned} g: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + 2y + 3z, y + 2z, 2x + 3y + 4z). \end{aligned}$$

Exercice 12.

Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} d: \quad \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto P'. \end{aligned}$$

Écrire la matrice de cette application relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 13.

Soient les applications linéaires f et g définies par :

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] & \text{et} & & g: \quad \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\longmapsto P(X+1). & & & P &\longmapsto P(X-1). \end{aligned}$$

Écrire les matrices de ces applications relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, puis multiplier ces matrices entre elles. Que remarque t-on ?

Exercice 14.

1. Écrire la matrice A relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto (P(0), P(1), P(2)). \end{aligned}$$

2. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, en déduire qu'il existe un unique polynôme P de degré 2 tel que $P(0) = a$, $P(1) = b$ et $P(2) = c$.
Calculer en fonction de a, b et c ce polynôme.

Dans d'autres base

Exercice 15.

Soit : $\mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$

$$P \mapsto P(X+1) - P(X)$$

1. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques.
2. Écrire la matrice de f avec $\mathbb{R}_3[X]$ muni de la base $(1, 1+X, 1+X^2, 1+X^3)$ et $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $(X(X-1), X(X+1), (X+1)(X-1))$.

Exercice 16.

On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 2z, 2x + y - 2z, 2x + 2y - 3z)$$

et $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0)$ et $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1)$.

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(\mathbf{u}_1)$, $f(\mathbf{u}_2)$ et $f(\mathbf{u}_3)$ et écrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}' = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.
3. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Exercice 17.

$$\text{Soit la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Définir l'application f telle que $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Définir l'application g telle que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Définir l'application h telle que $A = \text{Mat}_{\mathcal{D}}(h)$ où $\mathcal{D}$ est la base $(1, 1+X, 1+X+X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 18.

On reprend les notations de l'exo 14.

On pose $P_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}$, $P_1 = \frac{X(X-2)}{-1}$ et $P_2 = \frac{X(X-1)}{2}$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Écrire la matrice de l'application f en prenant comme base de $\mathbb{R}_2[X]$ cette base et comme base de $\mathbb{R}^3$ la base canonique.
3. En déduire une expression de f^{-1} de la forme

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ (a, b, c) &\longmapsto ? \end{aligned}$$

Exercice 19.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (y, x, -x - y - z)$$

1. Écrire A la matrice de f dans la base canonique
2. Calculer A^2 , en déduire $f \circ f$.
3. f est elle bijective? si oui calculer sa bijection réciproque
4. Soit $\mathcal{B}' = ((1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1))$ montrer que c'est une base et calculer la matrice de f dans cette base. On note B cette matrice, quelle est le lien entre A et B

Matrices de passage**Exercice 20.**

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire, dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer des vecteurs $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ non nuls tels que $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$, $f(\mathbf{w}) = -3\mathbf{w}$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice N de l'application f dans cette base.
4. Donner la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$. Calculer son inverse P^{-1} .
5. Donner la relation entre les matrices M , N et P . En déduire le calcul de M^n .

Exercice 21.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$

$$P \mapsto X(P(X+1) - P(X-1))$$

1. Écrire la matrice de φ dans la base canonique
2. En utilisant une matrice de passage écrire la matrice de φ dans la base $(1, -1 + X, -X + X^2, -X^2 + X^3)$

Exercice 22.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$

$$P \mapsto P'$$

1. Écrire la matrice de φ dans la base canonique
2. En utilisant une matrice de passage écrire la matrice de φ dans la base $(X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-3), X(X-2)(X-3), (X-1)(X-2)(X-3))$

Bases adaptées**Exercice 23.**

Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \left(x, \frac{x+y-z}{2}, \frac{x-y+z}{2}\right)$$

1. Écrire A la matrice de f dans la base canonique
2. Calculer A^2 , en déduire $f \circ f$.
3. f est elle bijective? si oui calculer sa bijection réciproque

4. Soit $\mathcal{B}' = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, -1))$ montrer que c'est une base et calculer la matrice de f dans cette base. On note B cette matrice, quelle est le lien entre A et B (on fera apparaître P une matrice de passage)

Exercice 24.

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3, e'_2 = e_3 + e_1, e'_3 = e_1 + e_2 \text{ et } f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ puis écrire la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers cette base.
2. Montrer que (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ puis écrire la matrice de passage Q de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers cette base $\mathbb{R}^2$. On note B la matrice de u dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) (espace de départ) et (f'_1, f'_2) (espace d'arrivée). Trouver un lien entre A , B , P et Q
3. Calculer B

Exercice 25.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (x - 2z, y - 2z, -z)$$

1. Écrire A la matrice de f dans la base canonique
2. Calculer A^2 , en déduire $f \circ f$.
3. f est elle bijective? si oui calculer sa bijection réciproque
4. Soit $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ montrer que c'est une base et tracer (directement) la matrice de f dans cette base.
5. On note B cette matrice, quelle est le lien entre A et B . On fera intervenir P une matrice de passage.

Exercice 26.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (\mathbf{u}, f(\mathbf{u}), f^2(\mathbf{u}))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de f dans cette base.
4. À l'aide de $\mathcal{B}$ trouver une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.

Théorème du rang, image, noyaux**Exercice 27.**

On désigne par $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f et le rang de f .
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4, -2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 28.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par $f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t)$.

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice A représentant l'endomorphisme f dans cette base.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
5. Quelle est la dimension du noyau de f ? Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 29.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$, et le rang de f .

Exercice 30.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$ ainsi que le rang de f .
2. Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.
3. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

▲ Pour aller plus loin

Exercice 31 (▲ Polynômes de Lagrange).

Cet exercice généralise l'exercice 14 Soit $n \geq 1$ un entier. On se donne $(n+1)$ réels $x_0, \dots, x_n$ deux à deux distincts, et $y_0, \dots, y_n$ une autre liste de $(n+1)$ réels (non nécessairement deux à deux distincts). On appelle polynôme interpolateur des y_i aux points x_i un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i = 0, \dots, n$. Pour tout entier $i = 0, \dots, n$, on définit le polynôme L_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$L_i = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$$

1. Pour i et j dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, donner une expression simple de $L_i(x_j)$
2. On pose $P(X) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(X)$. Démontrer que P est un polynôme interpolateur des y_i aux points x_i .
3. Démontrer qu'il existe un unique polynôme interpolateur des y_i aux points x_i dans $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Que peut on dire de la famille $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$
5. **Interprétation en terme d'application linéaire.**

On pose

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathbb{K}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ (y_0, \dots, y_n) &\longmapsto \sum_{i=0}^n y_i L_i(X) \end{aligned}$$

Montrer que cette application est un isomorphisme.

6. python

- (a) Écrire une fonction `lagrange` qui prend en arguments une liste x de points d'interpolation x_i , une liste y de valeurs y_i , de même longueur que x , a un réel, et qui renvoie la valeur de $P(a)$, où P est le polynôme interpolateur défini précédemment.
- (b) Sur un même graphique faire apparaître les graphes de $x \mapsto \sin(x)$ et du polynôme interpolateur de cette fonction au points $x_0 = 0, x_1 = \frac{2\pi}{n} \dots x_k = \frac{2\pi}{n}, \dots, x_n = 2\pi$
- (c) Que se passe-t-il quand n devient grand?

Exercice 32.

Soit f et g deux endomorphisme de E un espace vectoriel. Montrer que $f \circ g = 0$ si et seulement si $\text{Im } g \subset \text{Ker } f$.

Exercice 33 (Endomorphismes qui commutent, noyaux et images).

Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Démontrons que $\text{ker}(u)$ et $\text{Im } u$ sont stables par v , c'est-à-dire que

$$\forall x \in \text{Ker } u, \quad v(x) \in \text{Ker } u \quad \text{et} \quad \forall x \in \text{Im } u, \quad v(x) \in \text{Im } u.$$

Exercice 34.

Soient α, β deux réels et

$$M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha, \beta}$ est surjective.

Exercice 35.

On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie égale à n et que

$$\text{Im } f = \text{Ker } f$$

Montrer que $f^2 = 0$ et que $n = 2 \text{rg}(f)$.

La réciproque est-elle vraie?

Exercice 36 (Endomorphisme nilpotent).

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et f un endomorphisme de E et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$f^p = 0 \quad f^{p-1} \neq 0$$

On rappelle que

$$f^p = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}$$

1. Préciser ce que veut dire $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que

$$(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$$

est une famille libre.

indication choisir un $x \in E$ tels que $f^{p-1}(x) \neq 0$ et supposer que $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est liée.

Exercice 37.

On considère l'application linéaire :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) &\longmapsto P(X+1) - P(X). \end{aligned}$$

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Ker } f^n$ et $\text{Im } f^n$.

Exercice 38.

Soient λ un nombre réel et f l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto XP' - \lambda P. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer, suivant les valeurs de λ , le noyau de f .

Exercice 39 (▲ Image de certaines familles).

Soit $f \in \mathcal{L}(\text{ } E, F)$ où E et F sont de dimension finie. Soit $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p)$ une famille de E . On note $\mathcal{F} = (f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_p))$

1. On suppose que $\mathcal{F}$ est libre, montrer que $\mathcal{E}$ est libre.
2. On suppose que f est injective et $\mathcal{E}$ libre. Montrer que $\mathcal{F}$ est libre.
3. On suppose que f est surjective et $\mathcal{E}$ génératrice de E . Montrer que $\mathcal{F}$ est génératrice de F .
4. Trouver un contre exemple avec f injective et $\mathcal{E}$ génératrice de E et $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de F .
5. On suppose que pour toute famille de E , son image par f est libre. Montrer que dans ce cas f est injective.
6. Énoncer et démontrer un résultat analogue pour f surjective?

Problèmes, applications**Exercice 40.**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire, dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer un vecteur $\mathbf{e}_1 \neq 0$ tel que $f(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1$.
2. Déterminer un vecteur $\mathbf{e}_2 \neq 0$ tel que $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$.
3. Montrer que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Écrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.
5. Calculer l'inverse de P , et écrire la matrice T de f dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.
6. Quelle est la relation entre les matrices M , P et T ?
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1/2^n & 2n/2^n \\ 0 & 1/2^n \end{pmatrix}.$$

8. En déduire l'expression de M^n en fonction de n .
9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 9$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

- (a) On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_n = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

- (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = (17n + 1) \cdot \frac{1}{2^n}.$$

- (c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente? Si oui, quelle est sa limite?

Exercice 41. 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer $\text{Im } f = \text{Vect}(u)$ avec $\vec{u} = (1, -3, -2)$.
- (b) On pose $v = (1, 1, 0)$, Montrer que (u, v) forme une base de $\text{Ker } f$.
- (c) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un coefficient non nul.
- (d) Calculer M^k pour tout entier $k \geq 0$.

2. Même question avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 42.

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie. De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

- (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$.
- (b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

- (c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$.

Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.

2. (a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer PQ . En déduire que P est inversible et donner son inverse.

(b) On note C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de P . Calculer MC_1, MC_2, MC_3 et MC_4 ,

(c) Justifier que $M = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on déterminera.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$.

(b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geq 2, U_n = M^{n-2}U_2$.

(c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n , puis en déduire $P(E_n), P(F_n), P(G_n)$ et $P(H_n)$.

(d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n) = \frac{2}{10}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ième}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

(a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k .

(b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k .

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

(a) Calculer $P(S_n = 2)$ en distinguant les cas $n = 2, n = 3$ et $n \geq 4$.

(b) Déterminer $P(S_n = n)$.

(c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k , puis déterminer $E(S_n)$ en fonction de n .