

Variables aléatoires à densité

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Janvier 2024

Table des matières

I Rappels et définitions	2
I.1 Rappels généraux	2
I.2 Définition	2
II Lois classiques	4
II.1 Lois uniformes	4
II.2 Lois exponentielles	5
II.3 Lois normales, dites de Laplace-Gauss	5
III Espérance et variance	6
III.1 Espérance	6
III.2 Densité nulle en dehors d'un segment	6
III.3 Théorème de transfert	7
III.4 Variance	7
III.4.a Lois classiques	8
III.4.b VPropriétés	8
IV Transfert	9
IV.1 Exemple de transfert $Y = \exp(X)$	9
IV.1.a Exemple à connaître	10
V Généralisation de certains résultats vus au 1er semestre.	10
V.1 Indépendance	10
V.2 Propriétés de la variance et de l'espérance	12
VI Somme de variable aléatoires	13
VII Propriétés des lois usuelles	14
VII.1 Transformation affine de loi uniforme	14
VII.2 Lois normales	14
VII.3 Loi sans mémoire	16

Dans toute la suite les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

I Rappels et définitions

I.1 Rappels généraux

Définition 1 (Fonction caractéristique).

Si A est un sous ensemble d'un ensemble E la fonction indicatrice de A est

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Il faut connaître les théorèmes et définitions suivants de première année.

Définition 2 (Fonction de répartition).

Soit X une variable aléatoire réelle. La fonction de répartition de X est définie par

$$\text{Pour tout réel } x \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Proposition 1 (Utilisation de la fonction de répartition pour le calcul de probabilité).

On suppose que X est une variable aléatoire telle que sa fonction de répartition F_X soit continue sur $\mathbb{R}$. alors pour tout a et réels tels que $a < b$

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

I.2 Définition

Définition 3 (Variable à densité).

On dit que X est **une variable à densité** si et seulement si la fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Proposition 2 (De la fonction de répartition à une densité).

Si X est une variable dont la fonction de répartition F_X vérifie les conditions précédentes alors **une** densité de X est donnée par la dérivée de F_X en tout point où cela a un sens. Plus précisément toute fonction f_X qui ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de point est une densité de X .

Proposition 3 (Caractérisation d'une densité).

Si f est une fonction positive, continue (sauf éventuellement en un nombre fini de points) et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

Alors f est une densité d'une variable aléatoire.

Théorème 1 (D'une densité à une fonction de répartition).

Si f_X est une densité de probabilité alors

$$F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point où f est continue.

De plus cette fonction est la fonction de répartition de X .

En un point x où f_X est continue, $F_X'(x) = f_X(x)$.

Théorème 2 (Calcul de probabilité à l'aide d'une densité).

Si a et b sont deux réels ou $\pm\infty$ et si X est une variable aléatoire de densité f_X

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t) dt$$

Méthode : Montrer qu'une fonction donnée est une densité

Si on donne f une fonction et que l'on demande de vérifier que f est la densité d'une certaine variable aléatoire il faut :

1. Montrer que f est positive.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en un nombre fini de points**
3. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ **converge** et vaut 1.

Méthode : Montrer qu'une fonction est une fonction de répartition d'une variable à densité

Si on donne F une fonction et que l'on demande de vérifier que F est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire il faut :

1. Montrer que F est croissante.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en un nombre fini de points**

Dans ce cas là on peut affirmer que F est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire dont on peut calculer une densité en dérivant F .

Méthode : Après avoir calculer $\mathbb{P}(X \leq x)$

Si après avoir calculer, en utilisant des raisonnements de probabilités, $\mathbb{P}(X \leq x)$ pour une variable aléatoire donnée, on demande de montrer que X est une variable à densité, il faut vérifier :

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en un nombre fini de points**

Dans ce cas là on peut affirmer que X est une variable aléatoire à densité dont peut calculer une densité en dérivant F .



Attention : On fera bien attention à faire la différence de contexte entre les deux dernières méthodes ainsi que la différence entre les résultats obtenus.

II Lois classiques

II.1 Lois uniformes

Définition 4 (Loi, uniforme sur $[0; 1]$).

La fonction $\mathbb{1}_{[0;1]}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathbb{1}_{[0;1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

définie une densité d'une loi de probabilité notée $\mathcal{U}([0; 1])$.

La fonction de répartition est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Définition 5 (Loi uniforme sur $[a; b]$, avec $a < b$).

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

définie une densité d'une loi de probabilité notée $\mathcal{U}([a; b])$ La fonction de répartition est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

II.2 Lois exponentielles

Définition 6 (Densité et fonction de répartition).

Soit $\lambda > 0$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \lambda \exp(-\lambda x)$ définie une densité d'une loi de probabilité notée $\mathcal{E}(\lambda)$. La fonction de répartition associée est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = [1 - e^{-\lambda x}] \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Démonstration :

5

II.3 Lois normales, dites de Laplace-Gauss

Définition 7 (Loi normale centrée réduite).

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ définie une densité d'une loi de probabilité notée $\mathcal{N}(0, 1)$. La fonction de répartition associée est :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \end{aligned}$$

Définition 8 (Cas général).

Soit m un réels et σ un réel positif, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_{m,\sigma^2} : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ définie une densité d'une loi de probabilité notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. La fonction de répartition associée est :

$$\begin{aligned} \Phi_{m,\sigma^2} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt \end{aligned}$$

III Espérance et variance

Dans ce chapitre X est une variable aléatoire réelle qui admet une densité f ou f_X

III.1 Espérance

Définition 9 (Espérance).

On dit que X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ converge **absolument**. Dans ce cas là on note

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

Définition 10 (Variable centrée).

On dit qu'une variable est **centrée** si et seulement si son espérance est nulle.

Théorème 3 (Espérance des loi classiques).

- Une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([0; 1])$ admet une espérance qui vaut $\frac{1}{2}$.
- Une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([a; b])$ admet une espérance qui vaut $\frac{a+b}{2}$.
- Une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ admet une espérance qui vaut $\frac{1}{\lambda}$.
- Une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ admet une espérance qui vaut 0.
- Une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ admet une espérance qui vaut m .

III.2 Densité nulle en dehors d'un segment

Proposition 4.

Soit X une variable à densité, telle qu'une densité est nulle en dehors d'un intervalle $[a; b]$, alors X admet une espérance et

$$a \leq E(X) \leq b$$

Démonstration :

III.3 Théorème de transfert

Pour calculer l'espérance d'une variable définie à partir d'une autre, **sans en calculer la loi**, on peut utiliser le théorème de transfert.

Théorème 4 (Théorème de transfert).

Si X est une variable aléatoire admettant une densité f_X nulle en dehors d'un intervalle $]a; b[$ avec $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et si g est une fonction **continue sauf éventuellement en un nombre fini de points** sur $]a; b[$.

Alors $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_a^b g(t) f_X(t) dt$$

converge absolument.

Dans ce cas là

$$E(g(X)) = \int_a^b g(t) f_X(t) dt$$

Attention : Les hypothèses sont plus contraignantes que dans le cas discret.

Exemple : Soit X suivant une loi exponentielle de paramètre λ . Calculer l'espérance de $\min(1, X)$

Démonstration :

retenir

III.4 Variance

Remarque : Pour le lien entre parité de la densité et calcul de l'espérance, de la variance voir l'exercice de la feuille de TD.

Définition 11 (Moments d'ordre r).

Soit X une variable aléatoire réelle et r un entier. On dit que X admet un moment d'ordre r si et seulement si X^r admet une espérance et on note

$$m_r(X) = E(X^r)$$

Proposition 5 (Critère d'existence d'un moment).

Si X est une variable aléatoire X ayant pour densité f_X admet un moment d'ordre r si et seulement si l'intégrale suivante converge absolument

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t) dt$$

et alors

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t) dt$$

Définition 12 (Variance et écart-type).

Par définition la variance est le moment d'ordre 2 de $X - E(X)$ si il existe

$$V(X) = m_2(X - E(X))$$

Et l'écart-type est

$$\sigma(X) =$$

Théorème 5 (Formule de Koenig-Huygens).

La variance d'une variable aléatoire X existe si et seulement si le moment d'ordre 2 existe et dans ce cas là l'espérance existe et

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 =$$

III.4.a Lois classiques

Théorème 6.

- Une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([0; 1])$ admet une variance qui vaut $\frac{1}{12}$.
- Une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([a; b])$ admet une variance qui vaut $\frac{(b-a)^2}{12}$.
- Une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ admet une variance qui vaut $\frac{1}{\lambda^2}$.
- Une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ admet une variance qui vaut 1.
- Une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ admet une variance qui vaut σ^2 .

III.4.b VPropriétés

Proposition 6 (Variance nulle).

Une variable aléatoire à densité qui admet une variance nulle est presque sûrement constante i.e. il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbb{P}(X = \alpha) = 1$$

Proposition 7.

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance et a, b deux réels avec alors

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$



Définition 13 (Variable centrée et variable réduite).

On dit qu'une variable aléatoire est **centrée** si et seulement si elle admet une espérance et si

$$E(X) =$$

On dit qu'une variable aléatoire est **réduite** si et seulement si elle admet une variance et si

$$V(X) =$$

Proposition 8 (Transformation en variable réduite-centrée).

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance non nulle. On note σ son écart-type. Alors

$$X^* =$$

est une variable aléatoire à densité réduite-centrée.

Démonstration :



IV Transfert

IV.1 Exemple de transfert $Y = \exp(X)$

On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = \exp(X)$ calculons une densité de Y .

IV.1.a Exemple à connaître

Soit X une variable suivant la loi uniforme à densité sur l'intervalle $[0; 1[$ et $\lambda > 0$. On pose $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire réelle. Calculer une densité de Y .

Exercice 1.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$ calculer l'espérance de $-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$.

V Généralisation de certains résultats vus au 1er semestre.

V.1 Indépendance

Définition 14 (Indépendance de deux variable aléatoires réelles).

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sont dit qu'elles sont **indépendantes** si et seulement si pour tout intervalle I et pour tout intervalle J , on a

$$\mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) = \mathbb{P}(X \in I)\mathbb{P}(Y \in J)$$

Méthode pour calculer la loi d'un maximum ou d'un minimum

Si X et I sont deux variables aléatoires réelles indépendantes et si $S = \max(X, Y)$ et $I = \min(X, Y)$ pour calculer les lois de X et Y on peut utiliser les relations suivantes valables pour $x \in \mathbb{R}$

$$[S \leq x] = [X \leq x] \cap [Y \leq x]$$

et

$$[I \geq x] = [X \geq x] \cap [Y \geq x]$$

Remarque : Dans certains (vieux sujets) on eut trouver inf pour inférieur, c'est à dire le minimum, et sup pour supérieur, la maximum.

Exercice 2.

Soit X et Y deux variables suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Calculer la loi de $\max(X, Y)$.

Définition 15 (Indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles).

Soit $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une suite de variables aléatoires réelles. On dit qu'elles sont **mutuellement indépendantes** si et seulement si Pour toute famille $(I_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ d'intervalles

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \in I_i] \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in I_i)$$

Définition 16 (Indépendance mutuelle d'une suite de variables aléatoires réelles).

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. On dit qu'elles sont **mutuellement indépendantes** si et seulement si Pour tout sous-ensemble fini $K \subset \mathbb{N}$ **fini** et pour tout famille $(I_i)_{i \in K}$ d'intervalles

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in K} X_i \in I_i \right) = \prod_{i \in K} \mathbb{P}(X_i \in I_i)$$

lemme 1 (Lemme des coalitions).

Si $(X_1, X_2, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n)$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors toute variables aléatoire A qui est fonction des p premières et toute variable aléatoire B qui est fonction des $n - p$ dernières sont indépendantes.

V.2 Propriétés de la variance et de l'espérance

Proposition 9 (Croissance de l'espérance).

Soit X et Y deux variables aléatoires qui admettent une espérance. On suppose que l'on a

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$$

alors

$$E(X) \leq E(Y)$$

La plupart du temps on prend plus simplement comme hypothèse $X \leq Y$.

Proposition 10 (Rappel : linéarité de l'espérance).

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles admettant une espérance.

Alors $X + Y$ admet une espérance et

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Proposition 11 (Espérance d'un produit indépendant.).

Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** réelles admettant une espérance.

Alors XY admet une espérance.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Remarque : Nous n'avons pas besoin de savoir si X et Y sont des variables à densité, discrètes ou autres ...

Proposition 12 (Variance d'une somme indépendante.).

Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** réelles admettant une variance alors $X + Y$ admet une variance.

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Démonstration :

5

Proposition 13 (Généralisation à n variable aléatoires mutuellement indépendantes.).

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes alors

- Si $X_1, \dots, X_n$ admettent une variance alors $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance et

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$$

- Si $X_1, \dots, X_n$ admettent une espérance alors $X_1 X_2 \dots X_n$ admet une espérance et et

$$E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \dots E(X_n)$$

VI Somme de variable aléatoires

Les formules de cette parties doivent être rappelées dans une épreuve.

Théorème 7 (Somme de deux variables aléatoires à densité).

Soit X une variable aléatoire dont on note f une densité, et Y une variable aléatoire dont on note g une densité. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ admet une densité noté $f \star g$, où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(x - t) dt$$

et cette intégrale est bien convergente.

Proposition 14 (Commutativité du produit de convolution).

Si les intégrales définissant $f \star g$ convergent, alors $f \star g = g \star f$.

Exemple : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, calculons une densité de $X + Y$.

VII Propriétés des lois usuelles

VII.1 Transformation affine de loi uniforme

Proposition 15.

Soit X une variable aléatoire à densité ALORS.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$ si et seulement si $(b - a)X + a \hookrightarrow$

Démonstration :

À savoir faire!

Exemple : Nous allons recalculer l'espérance et la variance de $\mathcal{U}([a; b])$ en utilisant cette remarque.

VII.2 Lois normales

On rappelle qu'une densité d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_{m, \sigma^2}(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t - m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Sa fonction de répartition est notée

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi_{m, \sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{m, \sigma}(t) dt$$

Un cas particulier est la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ dont la densité est

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

et sa fonction de répartition

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

Proposition 16 (Symétrie de la fonction de répartition de la loi normale).

Avec les notations précédentes pour tout réel x

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Démonstration :



Proposition 17 (Transformation affine d'une loi normale).

Soit X une variable aléatoire à densité alors.

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si et seulement si $aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(\quad)$

Exemple : Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors $\sigma X + m$ suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Proposition 18 (Somme de lois normales).

Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** telles que :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \quad Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m', \sigma'^2)$$



Alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\quad)$$

Démonstration :



Exercice 3.

Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires réelles suivant des lois normales. On suppose qu'elles sont mutuellement indépendantes. Adapter le résultat précédent à ce cas là.

VII.3 Loi sans mémoire

Proposition 19 (Loi sans mémoire/invariance temporelle).

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors pour tout réels s et t strictement positifs

$$P_{X \geq s}(X \geq s + t) = P(X \geq t)$$

Démonstration :

5

Proposition 20 (Réciproque).

Si X est une variable à densité qui vérifie.

- pour $P(X \leq 0) = 0$
- Pour tout réels s et t positifs

$$P_{X > s}(X > s + t) = P(X > t)$$

Alors X suit une loi exponentielle.

Récapitulatif

Nom	Notation	Support	densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
uniforme	$\mathcal{U}([a; b])$	$[a; b]$ ou $]a; b[$ ou $[a; b[$ ou $]a; b]$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
uniforme	$\mathcal{U}([0; 1])$	$[0; 1],]0; 1[$ ou $[0; 1[$ ou $]0; 1]$	$\begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$
exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normale	$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	Φ_{m, σ^2}	m	σ^2
normale centrée réduite	$\mathcal{N}(0, 1)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	Φ	0	1