DM 12

BCPST Spé 2

à rendre le 24 janvier

OBLIGATOIRE

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont absolument convergentes
3. Montrer que les intégrales impropres $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.
   Indication On effectuera une intégration par partie puis on utilisera le résultat précédente.

   On souhaite prouver que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente c'est-à -dire que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t$ diverge. Pour cela on propose deux méthodes indépendantes.
4. **Méthode 1**. Prouver que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \geqslant \frac{1-\cos 2t}{2}$. En déduire le résultat.
5. **Méthode 2**. Prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t.$$

   Retrouver alors le résultat.

FACULTATIF

Dans tout l'exercice a est un réel strictement plus grand que 1.

1. Montrer que

$$\frac{1}{(1+t^a)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{an}}$$

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^a)^n}$ est convergente.
   Pour n entier naturel on pose alors

$$u_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^a)^n}$$

3. Montrer que la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
5. à l'aide d'une intégration par parties(*soignez la rédaction*), montrer que pour tout entier n on a

$$u_n(a) = an\,(u_n(a) - u_{n+1}(a)) \qquad (*)$$

   En déduire $u_{n+1}(a)$ en fonction de $u_n(a)$.
6. En utilisant la relation $(*)$, montrer que la série de terme général $\left(\frac{u_n(a)}{an}\right)$ est convergente.
7. En déduire la limite de la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
8. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$w_n(a) = \ln(u_n(a)) + \frac{\ln n}{a}$$

   Montrer que la série de terme général $(w_{n+1}(a) - w_n(a))$ et convergente.
9. En déduire l'existence d'un réel $K(a)$ tel que $u_n(a)$ soit équivalent à $\frac{K(a)}{n^{1/a}}$ quand n tend vers $+\infty$.