

*

DM 12

BCPST Spé 2

Réponses

OBLIGATOIRE

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

RÉPONSE:

Classique

*

2. Montrer que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ sont absolument convergentes

RÉPONSE:

Les fonctions $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ sont continues sur $[1; +\infty[$

$$\forall t \in [1; +\infty[, 0 \leq \left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2} \quad 0 \leq \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$$

et l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

est convergente, donc d'après le théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt \text{ sont absolument convergentes}$$

3. Montrer que les intégrales impropres $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ sont convergentes.

RÉPONSE:

Les fonctions $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ et $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ sont continues sur l'intervalle $[1; +\infty[$

Première méthode pour $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Soit $A > 1$, on pose pour $t \in [1; A]$

$$u(t) = \frac{1}{t}$$

$$u'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

$$v(t) = -\cos t$$

$$v'(t) = \sin t$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; A]$

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\sin t}{t} dt &= \int_1^A uv'(t) dt \\ &= [uv(t)]_1^A - \int_1^A uv'(t) dt \\ &= \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt \\ &= \left[-\frac{\cos A}{A} + \frac{\cos 1}{1} \right] - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt \end{aligned}$$

Or d'après le résultat précédent, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est absolument convergente donc convergente.

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt \in \mathbb{R}$$

Et comme $\cos$ est bornée

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$$

Donc

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\sin t}{t} dt \in \mathbb{R}$$

L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

Deuxième méthode pour $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$. Nous utilisons la version du théorème d'IPP pour les intégrales impropres

On pose pour $t \in [1; +\infty[$

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{t} & u'(t) &= -\frac{1}{t^2} \\ v(t) &= \sin t & v'(t) &= \cos t \end{aligned}$$

qui sont de classe $\mathcal{C}^1$

On constate que

$$\lim_{t \rightarrow 1} u(t)v(t) = \frac{\sin 1}{1} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$$

D'après le théorème du cours les intégrales

$$\int_1^{+\infty} uv' \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} u'v$$

ont même nature, comme d'après la question précédente $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ est absolument convergente donc convergente, il en est de même pour $\int_1^{+\infty} uv' = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ est convergente.

*

On souhaite prouver que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$ n'est pas absolument convergente c'est-à-dire que $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge. Pour cela on propose deux méthodes indépendantes.

4. **Méthode 1.** Prouver que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \geq \frac{1-\cos 2t}{2}$. En déduire le résultat.

RÉPONSE:

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$$

or comme $\sin^2(t) \in [0; 1]$

$$\sqrt{\sin^2(t)} \geq \sin^2(t)$$

et

$$\sqrt{\sin^2(t)} = |\sin(t)|$$

donc

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \geq \frac{1-\cos 2t}{2}$

On a donc pour $t \in [1; +\infty[$

$$\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{1}{2t} - \frac{\cos 2t}{2t} \geq 0$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t} dt$ diverge et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t} dt$ converge, donc par somme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t} - \frac{\cos 2t}{2t} dt$ diverge. En utilisant le théorème de comparaison

$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge

*

5. **Méthode 2.** Prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi |\sin t| dt.$$

Retrouver alors le résultat.

RÉPONSE:

*

Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\forall t \in [k\pi; (k+1)\pi] \quad \frac{1}{t} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}$$

Comme $|\sin(t)| \geq 0$

$$\forall t \in [k\pi; (k+1)\pi] \quad \frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{|\sin(t)|}{(k+1)\pi}$$

En utilisant la croissance de l'intégration

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt$$

Or la fonction $t \mapsto |\sin(t)|$ est π -périodique.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi |\sin t| dt.$

$$\int_0^\pi |\sin(t)| dt = 2$$

donc pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$$

Par sommation, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_\pi^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \sum_{k=1}^n \frac{2}{(k+1)\pi}$$

La série $\sum \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$, donc d'après le théorème des gendarmes.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\pi^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = +\infty$$

Or si l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ convergerait vers un réel I alors la limite

précédente serait aussi égale à I , donc par l'absurde $\int_\pi^{+\infty}$ diverge.

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \text{ diverge}$$

FACULTATIF

Dans tout l'exercice a est un réel strictement plus grand que 1.

1. Montrer que

$$\frac{1}{(1+t^a)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{an}}$$

RÉPONSE:

Comme $a > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^a = +\infty$, donc

$$1 = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}(t^a)$$

et donc

$$1 + t^a \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^a$$

donc par produit

$$(1 + t^a)^n \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} (t^a)^n$$

Par quotient

$$\frac{1}{(1+t^a)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{an}}$$

*

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^a)^n}$ est convergente.

Pour n entier naturel on pose alors

$$u_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^a)^n}$$

RÉPONSE:

Soit $a > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x^a)^n}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$. L'intégrale de

Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^a)^n}$ est convergente car $na > 1$ et en utilisant l'équivalent de la question précédente et le théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^a)^n} \text{ converge.}$$

Donc comme la fonction est continue sur $[0; 1]$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^a)^n} \text{ est convergente}$$

*

3. Montrer que la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

Alors comme $n \geq 1$

$$0 < (1+t^a)^n \leq (1+t^a)^{n+1}$$

donc

$$\frac{1}{1} (1+t^a)^{n+1} \leq \frac{1}{(1+t^a)^n}$$

Par croissance de l'intégrale, et comme les deux intégrales sont convergentes

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^a)^n} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^a)^{n+1}}$$

Donc

$$u_{n+1}(a) \leq u_n(a)$$

$$\text{La suite } (u_n(a))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}$$

*

4. En déduire que la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

RÉPONSE:

On a aussi démontré que la suite est minorée par 0, d'après le théorème de la convergence monotone

La suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Remarque : on n'a montré aussi que cette limite est positive

*

5. à l'aide d'une intégration par parties (*soignez la rédaction*), montrer que pour tout entier n on a

$$u_n(a) = an(u_n(a) - u_{n+1}(a)) \quad (*)$$

En déduire $u_{n+1}(a)$ en fonction de $u_n(a)$.

RÉPONSE:

Soit $A > 0$ On pose pour $t \in [0; A]$

$$\begin{aligned} f(t) &= (1+t^a)^{-n} & f'(t) &= -nat^{a-1}(1+t^a)^{-n-1} \\ g(t) &= 1 & g'(t) &= t \end{aligned}$$

qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$.

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{dt}{(1+t^a)^n} &= \int_0^A (1+t^a)^{-n} dt \\ &= \int_0^A f(t)g'(t) dt \\ &= [f(t)g(t)]_0^A - \int_0^A f'(t)g(t) dt \end{aligned}$$

intégration par parties

$$\begin{aligned} &= [t(1+t^a)^{-n}]_0^A + na \int_0^A t^{a-1}(1+t^a)^{-n-1} \cdot t dt \\ &= A(1+A^a)^{-n} + na \int_0^A t^a(1+t^a)^{-n-1} dt \\ &= A(1+A^a)^{-n} + na \int_0^A \frac{t^a}{(1+t^a)^{n+1}} dt \\ &= A(1+A^a)^{-n} + na \left[\int_0^A \frac{1+t^a}{(1+t^a)^{n+1}} dt - \int_0^A \frac{1}{(1+t^a)^{n+1}} dt \right] \\ &= A(1+A^a)^{-n} + na \left[\int_0^A \frac{1}{(1+t^a)^n} dt - \int_0^A \frac{1}{(1+t^a)^{n+1}} dt \right] \end{aligned}$$

Comme $a > 0$, en utilisant le théorème des croissances comparées

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} A(1+A^a)^{-n} = 0$$

Comme les intégrales $u_n(a)$ et $u_{n+1}(a)$ convergent, en passant à la limite

Pour tout entier n on a $u_n(a) = an(u_n(a) - u_{n+1}(a))$.

On peut aussi utiliser une IPP sur l'intégrale impropre.

*

6. En utilisant la relation (*), montrer que la série de terme général $\left(\frac{u_n(a)}{an}\right)$ est convergente.

RÉPONSE:

Soit $a > 1$, on a donc pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{u_n(a)}{na} = u_n(a) - u_{n+1}(a)$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{u_k(a)}{ka} &= \sum_{k=1}^N u_k(a) - u_{k+1}(a) \\ &= u_1(a) - u_{N+1}(a) \end{aligned} \quad \text{télescopage}$$

Comme d'après les questions précédentes, la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, donc la suite des sommes partielles liée à la série converge donc

La série de terme général $\left(\frac{u_n(a)}{an}\right)$ est convergente.

*

7. En déduire la limite de la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

RÉPONSE:

On sait que la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel positif que l'on note ℓ . Supposons que cette limite est $\ell > 0$ alors

$$u_n(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$$

et donc

$$\frac{u_n(a)}{an} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{an}$$

Comme la série harmonique est divergente et que tous les termes sont positifs, on montrerait alors, à l'aide du théorème de comparaison pour les séries à termes positifs que la série de terme général $\frac{u_n(a)}{an}$ diverge ce qui est en contradiction avec le résultat précédent.

La suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0

*

8. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$w_n(a) = \ln(u_n(a)) + \frac{\ln n}{a}$$

Montrer que la série de terme général $(w_{n+1}(a) - w_n(a))$ est convergente.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la question 5

$$\frac{u_{n+1}(a)}{u_n(a)} = 1 - \frac{1}{an}$$

De plus

$$\begin{aligned} w_{n+1}(a) - w_n(a) &= \ln(u_{n+1}(a)) + \frac{\ln(n+1)}{a} - \ln(u_n(a)) - \frac{\ln n}{a} \\ &= \ln\left(\frac{u_{n+1}(a)}{u_n(a)}\right) + \frac{1}{a} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{an}\right) + \frac{1}{a} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{an} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{an}\right)^2 + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

remarque préliminaire

DLs à justifier 1 ligne

$$= -\alpha \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

avec $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}\right)$ une constante non nulle

.

donc

$$w_{n+1}(a) - w_n(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\alpha \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

Or la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, donc en utilisant le théorème de comparaison sur les séries dont le terme général est de signe constant.

La série de terme général $(w_{n+1}(a) - w_n(a))$ est convergente.

*

9. En déduire l'existence d'un réel $K(a)$ tel que $u_n(a)$ soit équivalent à $\frac{K(a)}{n^{1/a}}$ quand n tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

La série de terme général $(w_{n+1}(a) - w_n(a))$ est convergente vers un réel que l'on note $L(a)$, or pour $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N-1} (w_{k+1}(a) - w_k(a)) = w_N(a) - w_1(a) \quad \text{télescopage}$$

Donc comme la suite des sommes partielles converge vers $\sum_{k=1}^{+\infty} w_{k+1}(a) - w_k(a) = L(a)$, la suite $(w_n(a) - w_1(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $L(a)$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n(a) = w_1(a) + L(a)$$

On note $w_1(a) + L(a) = G(a)$.

Comme pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$w_n(a) = \ln(u_n(a) n^{1/a})$$

on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n(a) n^{1/a}) = G(a)$$

et donc, comme la fonction exponentielle est continue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(a) n^{1/a} = \exp(G(a))$$

en posant $K(a) = \exp(G(a))$ qui est **non nul**, on peut écrire

$$u_n(a) n^{1/a} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K(a)$$

et donc

$$\boxed{u_n(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K(a)}{n^{1/a}}}$$

*