

DM 13

BCPST Spé 2

à rendre le 31 janvier

OBLIGATOIRE

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. $\inf(x, y)$ est une notation pour $\min(x, y)$ et $\sup(x, y)$ une notation pour $\max(x, y)$.

1. Soit f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \alpha_n x^{n-1} & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver la valeur de α_n pour que f_n soit une densité de probabilité.

2. On considère une variable aléatoire X_n réelle dont une densité de probabilité est f_n . On dit alors que X_n suit une loi monôme d'ordre n .

(a) Reconnaître la loi de X_1 .

(b) Dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, déterminer la fonction de répartition F_n de X_n , ainsi que son espérance $E(X_n)$

3. On considère deux variables aléatoires U_n et V_n définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi monôme d'ordre n ($n \geq 2$) et indépendantes, c'est-à-dire qu'elles vérifient en particulier l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P([U_n \leq x] \cap [V_n \leq x]) = P(U_n \leq x) P(V_n \leq x)$$

On pose $M_n = \sup(U_n, V_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(a) Pour tout réel x , écrire, en justifiant la réponse, l'événement $(M_n \leq x)$ à l'aide des événements $(U_n \leq x)$ et $(V_n \leq x)$.

(b) En déduire une densité de M_n . Vérifier que M_n suit une loi monôme dont on donnera l'ordre, puis déterminer sans calcul $E(M_n)$.

(c) Montrer que pour a et b deux réels $a + b = \min(a, b) + \max(a, b)$.

(d) On pose $T_n = \inf(U_n, V_n)$. Exprimer $M_n + T_n$ en fonction de U_n et V_n , puis en déduire, sans calcul d'intégrale, la valeur de $E(T_n)$.

FACULTATIF

Dans tout l'exercice λ désigne un réel strictement positif.

1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) En se référant éventuellement à une loi exponentielle, montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x) dx$ puis donner sa valeur.

(b) Montrer que h peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X .

(c) Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x h(x) dx$ puis donner sa valeur. En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

2. Dans cette question, on considère une variable aléatoire Y de densité f , nulle sur $] -\infty; 0[$, continue sur $[0; +\infty[$ et strictement positive sur $[0; +\infty[$. On note alors F la fonction de répartition de Y .

Justifier que, pour tout réel x , on a : $1 - F(x) > 0$.

On définit alors la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) \ln(1 - F(x)) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. (a) Montrer que g est positive sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que g est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $[0; +\infty[$.

(c) en remarquant que, si l'on pose $u'(x) = -f(x)$, on peut choisir $u(x) = 1 - F(x)$, montrer grâce à une intégration par parties que $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ est une intégrale convergente et que $\int_0^{+\infty} g(x) dx = 1$.

(d) Établir que g peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire Z .

(e) Étude d'un cas particulier.

Vérifier que la variable aléatoire Y suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$) vérifie les conditions imposées dans la deuxième question. Montrer alors que Z suit la même loi que X .