# DL mathématiques n°13
# Réponses

Dans cet exercice, $n$ désigne un entier naturel non nul.

1. Soit $f_n$ la fonction définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \alpha_n x^{n-1} & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver la valeur de $\alpha_n$ pour que $f_n$ soit une densité de probabilité.

RÉPONSE:

La fonction est continue sur $[0;\,1]$ car c'est une fonction polynomiale. Elle est aussi continue sur $]-\infty;\,0[$ et sur $]1;\,+\infty[$ comme fonction constante

$f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $0$ et $1$.

De plus dès que $\alpha_n$ est positif, $f$ est toujours positive. On aussi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \alpha_n \int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha_n \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 \\ &= \alpha_n \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Il suffit que $\alpha_n = n$ pour que cette intégrale soit égale à 1

$$\boxed{\text{Si } \alpha_n = n \text{ alors } f_n \text{ est une densité de probabilité.}}$$

*

2. On considère une variable aléatoire $X_n$ réelle dont une densité de probabilité est $f_n$. On dit alors que $X_n$ suit une loi monôme d'ordre $n$.

(a) Reconnaître la loi de $X_1$.

RÉPONSE:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1x^{1-1} & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{X_1 \text{ suit une loi uniforme sur } [0;\,1].}$$

*

(b) Dans le cas où $n$ est supérieur ou égal à 2, déterminer la fonction de répartition $F_n$ de $X_n$, ainsi que son espérance $E(X_n)$ et sa variance $V(X_n)$.

RÉPONSE:

On a par definition, pour tout réel $x$

$$F_n = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

- Si $x < 0$ alors
$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$$
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors
$$F_n(x) = \int_0^x n t^{n-1}\,\mathrm{d}t = [t^n]_0^x = x^n$$
- Si $1 < x$ alors
$$F_n(x) = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x 0\,\mathrm{d}t = 1 + 0$$

$$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel } F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } x \in [0;\, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

Sous réserve de convergence absolue

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x f_n(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{définition de l'espérance} \\ &= \int_0^1 x \cdot n x^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{n}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

et sous réserve de convergence absolue

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^1 x^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{théorème de transfert} \\ &= \int_0^1 x^2 \cdot n x^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{n}{n+2} x^{n+2}\right]_0^1 \\ &= \frac{n}{n+2} \end{aligned}$$

Donc $X$ admet un moment d'ordre 2 et en utilisant le théorème de Koening-Huygens, $X$ admet une variance qui vérifie

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{X \text{ admet une espérance et une variance et } E(X) = \frac{n}{n+1}, \text{ et } V(X) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}}$$

Si on connait les valeurs de l'espérance et de la variance d'une loi uniforme $\mathcal{U}([0;\,1])$ on peut vérifier si les formules sont cohérentes.

*

3. On considère deux variables aléatoires $U_n$ et $V_n$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi monôme d'ordre $n$ $(n \geqslant 2)$ et indépendantes, c'est-à-dire qu'elles vérifient en particulier l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}\left(U_n \leqslant x \cap V_n \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(U_n \leqslant x\right)\mathbb{P}\left(V_n \leqslant x\right)$$

On pose $M_n = \sup\left(U_n, V_n\right)$ et on admet que $M_n$ est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(a) Pour tout réel $x$, écrire, en justifiant la réponse, l'événement $(M_n \leqslant x)$ à l'aide des événements $(U_n \leqslant x)$ et $(V_n \leqslant x)$.

RÉPONSE:

$$[M_n \leqslant x] = [U_n \leqslant x] \cap [V_n \leqslant x]$$

En effet si $U_n$ et $V_n$ sont tous les deux plus petits que $x$ alors leur maximum est plus petit que $x$ ce qui démontre

$$[U_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant x] \subset [M_n \leqslant x]$$

Réciproquement si le maximum de $U_n$ et $V_n$ est plus petit que $x$ alors comme

$$U_n \leqslant \max(U_n, V_n) \qquad \text{et} \qquad V_n \leqslant \max(U_n, V_n)$$

alors dans ce cas

$$U_n \leqslant x \qquad \text{et} \qquad V_n \leqslant x$$

donc

$$[M_n \leqslant x] \subset [U_n \leqslant x] \cap [V_n \leqslant x]$$

$$\boxed{[M_n \leqslant x] = [U_n \leqslant x] \cap [V_n \leqslant x]}$$

*

(b) En déduire une densité de $M_n$. Vérifier que $M_n$ suit une loi monôme dont on donnera l'ordre, puis déterminer sans calcul $E(M_n)$.

RÉPONSE:

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n \leqslant x) &= \mathbb{P}([U_n \leqslant x] \cap [V_n \leqslant x]) && \text{question précédente} \\
&= \mathbb{P}(U_n \leqslant x) \cdot \mathbb{P}(V_n \leqslant x) && \text{indépendance} \\
&= F_n(x) \cdot F_n(x) && U_n \text{ et } V_n \text{ ont la même fonction de répartition} \\
&= \begin{cases} 0^2 & \text{si } x < 0 \\ (x^n)^2 & \text{si } x \in [0;\, 1] \\ 1^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

On reconnait donc que la fonction de répartition de $M_n$ est la fonction de répartition de $X_{2n}$ donc

$$\boxed{M_n \text{ suit la loi du monôme d'ordre } 2n}$$

*

(c) Montrer que pour $a$ et $b$ deux réels $a + b = \min(a, b) + \max(a, b)$.

RÉPONSE:

Par disjonction de cas

- si $a \leqslant b$ alors $\min(a, b) = a$ et $\max(a, b) = b$ et donc
$$a + b = \min(a, b) + \max(a, b)$$
- si $b \leqslant a$ alors $\min(a, b) = b$ et $\max(a, b) = a$ et donc
$$a + b = \min(a, b) + \max(a, b)$$

Donc

$$\boxed{\text{Pour tout réels } a \text{ et } b \text{ on a } a + b = \min(a, b) + \max(a, b).}$$

*

(d) On pose $T_n = \inf(U_n, V_n)$. Exprimer $M_n + T_n$ en fonction de $U_n$ et $V_n$, puis en déduire, sans calcul d'intégrale, la valeur de $E(T_n)$.

RÉPONSE:

En appliquant la remarque précédente

$$U_n + V_n = T_n + M_n$$

donc par linéarité de l'espérance

$$E(U_n) + E(V_n) = E(T_n) + E(M_n)$$

en utilisant ...

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= E(U_n) + E(V_n) - E(M_n) \\
&= 2\frac{n}{n+1} - \left(\frac{2n}{2n+1}\right) \\
&= \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(T_n) = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}}$$

*