

## DM 13

BCPST Spé 2

à rendre le 06 février

### OBLIGATOIRE

- Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx$  est convergente et donner sa valeur
  - On considère la fonction  $f$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$ .
    - Montrer que  $f$  est paire.
    - Montrer que  $f$  peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.
- Dans la suite, on considère une variable aléatoire  $X$ , définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  admettant  $f$  comme densité. On note  $F$  la fonction de répartition de  $X$ .
- $X$  admet-elle une espérance?
  - On pose  $Y = \ln(1+|X|)$  et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 
    - Déterminer  $Y(\Omega)$
    - Exprimer la fonction de répartition  $G$  de  $Y$  à l'aide de  $F$ .
    - En déduire que  $Y$  admet pour densité la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Montrer enfin que  $Y$  suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.
- On note  $U$  une variable aléatoire qui suit une loi  $\mathcal{U}([0; 1])$  et on suppose que  $X$  et  $U$  sont indépendantes, calculer une densité de  $X + U$ .

### FACULTATIF

Pour  $\mu$  et  $\beta$  deux réels tels que  $\beta > 0$  on définit la fonction

$$F_{\mu, \beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x - \mu}{\beta}\right)}$$

En particulier si  $\mu = 0$  et  $\beta = 1$  alors on note  $F_{0,1} = F$

- Montrer que  $F_{\mu, \beta}$  peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.  
Si  $X$  est une variable aléatoire admettant  $F_{\mu, \beta}$  comme fonction de répartition alors on dit que  $X$  suit la *loi logistique* de paramètre  $\mu$  et  $\beta$ . Et on note

$$X \hookrightarrow lg(\mu, \beta)$$

- Pour  $y \in \mathbb{R}$ , calculer  $F(y) + F(-y)$ .
- Soit  $X \hookrightarrow lg(\mu, \beta)$ . Calculer  $f_{\mu, \beta}$  une densité de  $X$ . On note  $f$  une densité de la loi  $lg(0, 1)$
- ▲ Graphe
  - Montrer que  $f$  est dérivable deux fois et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -\frac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3} \quad f''(x) = \frac{e^x(e^{2x} - 4e^x + 1)}{(1 + e^x)^4}$$

- Donner les variations de  $f$ , ainsi que ces points d'inflexion. On vérifiera que les deux points d'inflexion sont bien symétriques par rapport à 0.
  - Tracer la courbe représentative de  $f$
  - Avec des considérations géométriques tracer l'allure de la courbe
- Soit  $Y \hookrightarrow lg(0, 1)$ . En utilisant des arguments de parité calculer  $E(Y)$ . On admet que  $V(Y) = \frac{\pi^2}{3}$ .
  - Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ , et  $X \hookrightarrow lg(\mu, \beta)$ . Montrer que  $aX + b \hookrightarrow lg(a\mu + b, a\beta)$
  - Soit  $X \hookrightarrow lg(\mu, \beta)$ . En utilisant les deux questions précédentes calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ . (les calculs sont rapides, on ne calcule pas d'intégrale).
  - On suppose que  $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$  montrer que  $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$  suit une loi logistique  $lg(0, 1)$ . En déduire une façon de simuler la loi  $lg(0, 1)$ , puis la loi  $lg(\mu, \beta)$
  - On suppose que  $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ . Montrer que  $\ln(e^Z - 1)$  suit une loi que l'on reconnaîtra. En déduire une autre façon de simuler la loi  $lg(0, 1)$ , puis la loi  $lg(\mu, \beta)$
  - Autre méthode "classique" pour le calcul de l'espérance** On note  $f$  (respectivement  $F$ ) une densité (respectivement la fonction de répartition) d'une variable aléatoire  $Y \hookrightarrow lg(0, 1)$ .

- Montrer que pour  $M > 0$

$$\int_0^M x f(x) dx = [x(F(x) - 1)]_0^M + \int_0^M (1 - F(x)) dx$$

- En déduire une valeur de  $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$
- En déduire  $E(Y)$