DM 11

BCPST Spé 2

Réponses

Exercice 1

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

I.1 Étude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$Q(X) = (X-1)\,P'(X) + P(X)$$

et $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$P_0(X) = 1,\ P_1(X) = X \text{ et } P_2(X) = X^2$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

RÉPONSE:

Soit P_1 et P_2 deux polynômes de E et α un réel.

$$\begin{aligned} f(\alpha P_1 + P_2) &= (X-1)(\alpha P_1 + P_2)' + \alpha P_1 + P_2 \\ &= (X-1)(\alpha P_1' + P_2') + \alpha P_1 + P_2 \qquad \text{linéarité de l'intégration} \\ &= \alpha\left((X-1)P_1' + P_1\right) + (X-1)P_2' + P_2 \\ &= \alpha f(P_1) + f(P_2) \end{aligned}$$

Donc

$$f \text{ est linéaire}$$

De plus si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors

$$\deg(P') \leqslant 2-1$$

donc

$$\deg((X-1)P') \leqslant 1+1$$

et

$$\deg((X-1)P' + P) \leqslant \max(\deg((X-1)P'), \deg P) \leqslant 2$$

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme.}}$$

*

2. Vérifier que la matrice A de f dans $\mathscr{B}$, s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

RÉPONSE:

$$\begin{aligned} f(P_0)(X) &= (X-1)\cdot 0 + 1 \\ &= 1 + 0\cdot x + 0\cdot X^2 \\ f(P_1)(X)(X-1)\cdot 1 + X &= -1 + 2\cdot X + 0\cdot X^2 \\ f(P_2)(X) &= (X-1)\cdot 2X + X^2 \\ &= -2X + 3X^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

*

3. Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies par :

$$R_0(X) = 1,\ R_1(X) = X-1 \text{ et } R_2(X) = (X-1)^2$$

RÉPONSE:

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(R_0)(X) &= f(P_0)(X)\\
&= R_0(X)\\
f(R_1)(X) &= (X-1)\cdot 1 + X - 1\\
&= 2R_1(X)\\
f(R_2)(X) &= (X-1)\cdot 2(X-1) + (X-1)^2\\
&= 3R_2(X)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a } f(R_0) = R_0,\ f(R_1) = 2R_1,\ f(R_2) = 3R_1\ .}$$

*

4. Montrer que $\mathscr{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de E.
   Écrire la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathscr{B}'$.

RÉPONSE:

Répondons aux deux premières questions simultanément, on pose P la matrice dont les colonnes sont formées par les coordonnées de (R_0, R_1, R_2) exprimés dans la base (P_0, P_1, P_2)

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Comme cette matrice est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls, elle est inversible

$$\boxed{\mathscr{B}' = (R_0, R_1, R_2) \text{ est une base de } E.}$$

D'après la question précédente

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

*

5. Vérifier que :
$$\begin{cases} R_2(x) + 2R_1(X) + R_0(X) = P_2(X)\\ R_1(X) + R_0(X) = P_1(X) \end{cases}$$
   En déduire la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$

RÉPONSE:

Par le calcul, on trouve ce qui est demandé et o constate en plus que $P_0 = R_0$, l'énoncé nous donne la décomposition des vecteurs de la base canonique dans la base $\mathscr{B}'$, P^{-1} est la matrice qui est demandée est la matrice dont les colonnes sont formées des coordonnées des vecteurs de la bases canonique exprimés dans la base $\mathscr{B}'$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

*

6. Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1}. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$$
   et expliciter la troisième colonne de la matrice $\left[A^{-1}\right]^n$.

RÉPONSE:

D'après la formule de changement de base

$$A = PDP^{-1}$$

donc d'après la formule d'inversion d'un produit

$$A^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1} P^{-1}$$

$$\boxed{A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.}$$

La récurrence est laissée en exercice. Comme D est diagonale,

cette matrice étant elle même diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left(D^{-1}\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$$

ce qui permet de calculer

$$\boxed{\text{La dernière colonne de } \left[A^{-1}\right]^n = \begin{pmatrix} 1-2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.}$$

*

I.2 Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.
On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{ème}$ épreuve ($k \geqslant 0$)

On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} \mathrm{P}\left(X_k = 0\right) \\ \mathrm{P}\left(X_k = 1\right) \\ \mathrm{P}\left(X_k = 2\right) \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{P}\left[X_k = j\right]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{ème}$ épreuve.

On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi de X_2 Calculer l'espérance et la variance de X_2

RÉPONSE:

On considère le système complet d'évènements $[X_1 = 0]$, $[X_1 = 1]$, $[X_1 = 2]$. Comme le premier tirage se fait de façon honnête dans la l'urne non modifiée

$$P[X_1 = 0] = P[X_1 = 1] = P[X_1 = 2] = \frac{1}{3}$$

On sait de plus que

- si $X_1 = 2$ est réalisé l'urne comporte encore les boules $\{0, 1, 2\}$
- si $X_1 = 2$ est réalisé l'urne comporte encore les boules $\{0, 1\}$
- si $X_1 = 0$ est réalisé l'urne ne comporte que la boules $\{0\}$

D'après le théorème des probabilités totales

$$
\begin{aligned}
P(X_2=0) &= P[X_1=0]P_{[X_1=0]}[X_2=0]+P[X_1=1]P_{[X_1=1]}[X_2=0]+P[X_1=2]P_{[X_1=2]}[X_2=0]\\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}\\
&= \frac{11}{18}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X_2=1) &= P[X_1=0]P_{[X_1=0]}[X_2=1]+P[X_1=1]P_{[X_1=1]}[X_2=1]+P[X_1=2]P_{[X_1=2]}[X_2=1]\\
&= \frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\
&= \frac{5}{18}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X_2=2) &= P[X_1=0]P_{[X_1=0]}[X_2=2]+P[X_1=1]P_{[X_1=1]}[X_2=1]+P[X_1=2]P_{[X_1=2]}[X_2=2]\\
&= \frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\
&= \frac{2}{18}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{P(X_2=0)=\frac{11}{18}\;\; P(X_2=1)=\frac{5}{18}\;\; P(X_2=2)=\frac{2}{18}.}
$$

Comme la variable aléatoire est à support fini elle admet une espérance et

$$
\begin{aligned}
E(X_2) &= 0P(X_2=0)+1\cdot P(X_2=1)+2\cdot P(X_2=2)\\
&= 0+\frac{5}{1}8+\frac{4}{1}8\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{X_2 \text{ admet une espérance qui vaut } \frac{1}{2}}
$$

*

2. Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier naturel k :

$$
U_{k+1} = A^{-1}U_k
$$

RÉPONSE:

D'après le théorème des probabilités totales, avec le système complet d'évènements $[X_k=0],\ [X_k=1],\ [X_k=2]$

$$
\begin{aligned}
P(X_{k+1}=0) &= P[X_k=0]P_{[X_k=0]}[X_{k+1}=0]+P[X_k=1]P_{[X_k=1]}[X_{k+1}=0]+P[X_k=2]P_{[X_k=2]}[X_{k+1}=\\
&= P[X_k=0]\cdot\frac{1}{1}+P[X_k=1]\cdot\frac{1}{2}+P[X_k=2]\cdot\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P[X_{k+1}=1) &= P[X_k=0]P_{[X_k=0]}[X_{k+1}=1]+P[X_k=1]P_{[X_k=1]}[X_{k+1}=1]+P[X_k=2]P_{[X_k=2]}[X_{k+1}=\\
&= P[X_k=0]\cdot 0+P[X_k=1]\cdot\frac{1}{2}+P[X_k=2]\cdot\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X_{k+1}=2) &= P[X_k=0]P_{[X_k=0]}[X_{k+1}=2]+P[X_k=1]P_{[X_k=1]}[X_{k+1}=2]+P[X_k=2]P_{[X_k=2]}[X_{k+1}=\\
&= P[X_k=0]\cdot 0+P[X_k=1]\cdot 0+P[X_k=2]\cdot\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Ce que l'on peut écrire

$$
\begin{pmatrix} P[X_{k+1}=0] \\ P[X_{k+1}=1] \\ P[X_{k+1}=2] \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} P[X_k=0] \\ P[X_k=1] \\ P[X_k=2] \end{pmatrix}
$$

et on vérifie que

$$
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} A = A
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

ce qui démontre que la matrice trouvée est l'inverse de A

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } k : U_{k+1} = A^{-1}U_k.}$$

*

3. Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0

RÉPONSE:

On démontrerait par récurrence (à faire ?)

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k \in \mathbb{N},\ \left[A^{-1}\right]^k U_0\ .}$$

Remarque : la formule est vraie pour $k=1$ car on a bien choisie U_0, on a considéré qu'au temps 0 la bille 3 a été tirées, au début de l'étape 1 l'urne contient bien $\{0,1,2\}$ c'est bien l'urne initiale

*

4. Pour tout k de $\mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{P}\left[X_k=0\right]=1,\quad \lim_{k\to+\infty} \mathrm{P}\left[X_k=1\right]=0,\quad \lim_{k\to+\infty} \mathrm{P}\left[X_k=2\right]=0$$

RÉPONSE:

$\boxed{\cdot}$

*

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, on notera $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.

RÉPONSE:

On trouve

$$\boxed{(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (A-I)^3 = 0}$$

*

2. La matrice A est-elle inversible ?

RÉPONSE:

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est inversible (calculs à faire)}}$$

*

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1;1[, \varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

3. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1;1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

RÉPONSE:

La fonction $x \mapsto x+1$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1;1[$ et sur cet intervalle elle prend des valeurs sur $]0;1[$.
La fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ (on a exclu 0) donc par composition

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur }]-1;1[}$$

On a pour $x \in]-1;1[$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$
$$\varphi''(x) = -\frac{1}{4(1+x^{3/2}}$$

$$\boxed{\varphi'(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \varphi''(0) = -\frac{1}{4}}$$

*

4. Citer la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, et **calculer** un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

RÉPONSE:

La fonction étant de classe $\mathscr{C}^2$ on peut appliquer la formule de taylor Young et donc

$$\sqrt{1+x} = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{\varphi'(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Et donc

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.}$$

*

5. On note $P(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
(P(x))^2 &= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)^2 \\
&= 1^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}x^2\right)^2 + 2\times 1\times\left(\frac{1}{2}x\right) + 2\times 1\times\left(-\frac{1}{8}x^2\right) + 2\times\left(\frac{1}{2}x\right)\left(-\frac{1}{8}x^2\right) \\
&= 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 \\
&= 1 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(x)^2 = 1 + x - \tfrac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4}$$

*

6. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(I + \frac{1}{2}C + \alpha C^2)^2 = A$.
   Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

RÉPONSE:

On constate que $C^3 = 0$, donc $C^3 = C^4 = 0$.
On a

$$(I + \frac{1}{2}C + \alpha C^2)^2 = (P(C))^2 = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4 - \frac{1}{4}C^2 - \frac{1}{8}C^3 = I + C = A$$

$$\boxed{(P(C))^2 = A}$$

*

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1,0,1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$

   (a) Calculer les vecteurs v et u.

RÉPONSE:

La matrice de l'application $f - Id$ dans la base canonique est $A - I$ que l'on a calculer précédemment. On a aussi $u = (f - Id) \circ (f - Id)(w)$ Pour calculer ces vecteurs on utilise la matrice $A - I$ et $(A - I)^2$

$$(A - I)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc le vecteur v a pour coordonnées dans la base canonique $(1, 1, -3)$

$$(A - I)^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc le vecteur v a pour coordonnées dans la base canonique $(-6, -6, 0)$

□

*

   (b) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

RÉPONSE:

Soit α, β et γ trois réels

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 &\Leftrightarrow \ldots A finir \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

La famille (u, v, w) est libre. Comme de plus Dim $\mathbb{R}^3 = 3$

$$\boxed{(u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

*

   (c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.

RÉPONSE:

D'apres la définition des trois vecteurs (u, v, w) on sait que

$$f(v) = u + v \qquad f(w) = v + w$$

Ce qui nous donne les deux dernières colonnes de la matrice Puis en utilisant On a aussi $(A - I)^3 = 0$ donc

$$(f - Id) \circ (f - Id) \circ (f - Id)(w) = 0$$

ce qui donne

$$(f - Id) \circ (f - Id)(v) = 0$$

puis

$$(f - Id)(u) = 0$$

donc

$$f(u) = u)$$

Ce qui permet de remplir la première colonne

$$\boxed{\text{La matrice représentative de } f \text{ dans la base } \mathscr{B}' \text{ est } T}$$

*

   (d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

RÉPONSE:

Cette matrice P est la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathscr{B}'$. On la construit en mettant dans les colonnes es coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ décomposés dans la base canonique.

$\square$

*

8. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme :
   $$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$
   où a, b et c sont trois réels.

RÉPONSE:

On suppose que $N^2 = T$ alors
$$NT = NN^2 = N^3$$
et
$$TN = N^2N = N^3$$
donc
$$\boxed{\text{Si } N^2 = T, \text{ alors } NT = TN}$$
On suppose que $N^2 = T$ alors on sait que $NT = TN$. Cherchons N sous la forme
$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$
Alors $NT = TN$ peut s'écrire
$$\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix}$$
Cette égalité entre deux matrices nous donne le système a neufs équations et neuf inconnues
$$\begin{cases} a+d & = a \\ b+e & = a+b \\ c+f & = b+c \\ d+g & = d \\ e+h & = d+e \\ f+i & = e+f \\ g & = g \\ h & = g+h \\ i & = h+i \end{cases}$$
Donc
$$\begin{cases} d & = 0 \\ e & = a \\ f & = b \\ g & = 0 \\ h & = d \\ i & = e \\ g & = 0 \\ i & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d &= 0 \\ e &= a \\ f &= b \\ g &= 0 \\ h &= 0 \\ i &= a \\ g &= 0 \\ h &= 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Si } N^2 = T, \text{ alors } N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}}$$

*

(b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.

RÉPONSE:

On peut donc chercher les solutions sous la forme $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ L'équation $N^2 = T$ est équivalente à

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac+b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} a^2 &= 1 \\ 2ab &= 1 \\ 2ac+b^2 &= 0 \end{cases}$$

Il y a donc dexu solutions pour $a = \pm 1$

Avec $a = 1$ On a une solution

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et avec $a = -1$ on trouve une autre solution

$$N_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Les deux solutions sont } N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

*

9. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

RÉPONSE:

Soit M une matrice carrée d'ordre 3

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Leftrightarrow P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MPP^{-1}MP = T \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = T \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MP = N_1 \text{ ou } P^{-1}MP = N_2 \qquad \text{Résolution précédente} \\ &\Leftrightarrow M = PN_1P^{-1} \text{ ou } M = PN_2P^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les deux solutions sont } PN_1P^{-1},\ PN_2P^{-1}.}$$

Donc on retrouve bien que PN_1P^{-1} est la solution trouvé dans la partie B !

*

10. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

<u>RÉPONSE:</u>

$\boxed{\text{Ce n'est pas un espace vectoriel car la matrice nulle n'est pas solution de cette équation.}}$

*