# DM 14

BCPST Spé 2

Réponses

## OBLIGATOIRE

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx$ est convergente et donner sa valeur

RÉPONSE:

La fonction intégrée est continue sur $[0;+\infty[$.
Soit $A > 0$

$$\int_0^A \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A = 1 - \frac{1}{1+A}$$

Donc

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{1}{(1+x)^2} \mathrm{d}x = 1$$

$\boxed{\text{L'intégrale converge et vaut 1}}$

*

2. On considère la fonction $f$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

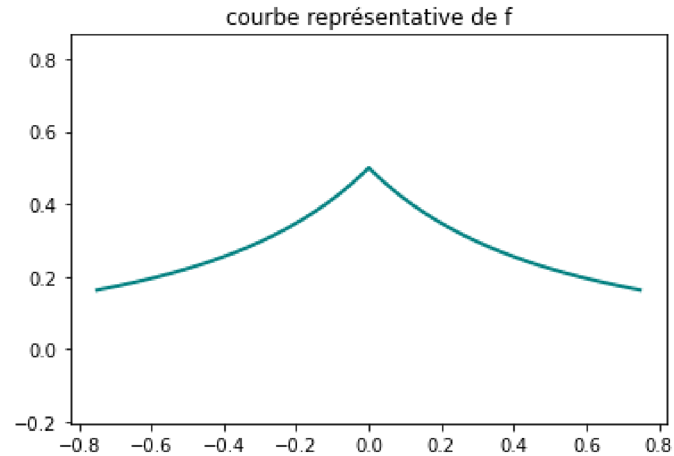
(a) Montrer que $f$ est paire.

RÉPONSE:

$\mathbb{R}$ est centrée en 0 et pour $x$ réel

$$f(-x) = \frac{1}{(1+|-x|^2)} = \frac{1}{(1+|x|^2)} = f(x)$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.}}$




*

(b) Montrer que $f$ peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

RÉPONSE:

La fonction est positive sur $\mathbb{R}$ et continue comme quotient défini d'une fonction continue.(Valeur absolue est bien continue sur $\mathbb{R}$) de plus grace à la parité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{première question}$$

$\boxed{f \text{ peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.}}$

*

Dans la suite, on considère une variable aléatoire $X$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ admettant $f$ comme densité.
On note $F$ la fonction de répartition de $X$.

3. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que $Y$ est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$

   (a) Déterminer $Y(\Omega)$

RÉPONSE:

Comme $|X|+1$ prend ses valeurs dans $[0;+\infty[$ et que pour $u$ plus grand que 1, $\ln(u)>0$ :

$$\boxed{Y \text{ prend ses valeurs dans } \mathbb{R}_+}$$

*

   (b) Exprimer la fonction de répartition $G$ de $Y$ à l'aide de $F$.

RÉPONSE:

Pour $x<0$ d'après le résultat précédent , $G(x)=0$
Soit $x \leqslant 0$

$$\begin{aligned}
G(x) &= P(Y \leqslant 0)\\
&= P(\ln(1+|X|) \leqslant x)\\
&= P(1+|X| \leqslant \mathrm{e}^x) && \exp \text{ est croissante}\\
&= P(|X| \leqslant \mathrm{e}^x - 1)\\
&= P(1-\mathrm{e}^x \leqslant X \leqslant \mathrm{e}^x - 1)\\
&= F(\mathrm{e}^x - 1) - F(1-\mathrm{e}^x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel } G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ F(\mathrm{e}^x-1)-F(1-\mathrm{e}^x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

*

   (c) En déduire que $Y$ admet pour densité la fonction $g$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

RÉPONSE:

$F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition d'une variable dont la densité est continue sur $\mathbb{R}$. Comme exponentielle est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par composition $x \mapsto F(\mathrm{e}^x-1)-F(1-\mathrm{e}^x)$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et donc $G$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et $]0;\infty[$.
De plus comme $F$ est continue en 0

$$\lim_{x\to 0^+} G(x) = F(0)-F(0) = \lim_{x \to 0-} G(0) = G(0)$$

Donc $G$ est continue en 0

$$\boxed{G \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf peut être en } 0.}$$

Pour $x<0$ $G'(x)=0$ et pour $x>0$

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x-1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}}$$

**Remarque :** on peut choisir n'importe valeur pour la densité en 0 !

*

   (d) Montrer enfin que $Y$ suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

RÉPONSE:

Pour $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
2E^x f(\mathrm{e}^x-1) &= 2\mathrm{e}^x \frac{1}{2(1+|\mathrm{e}^x-1|)^2}\\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{(1+|\mathrm{e}^x-1|)^2}\\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x-1)^2} && \text{car } \mathrm{e}^x-1>0 \text{ car } x>0\\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} && \text{car } \mathrm{e}^x-1>0 \text{ car } x>0\\
&= \varepsilon^{-x}
\end{aligned}$$

et on reconnaît une densité d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.

$$\boxed{Y \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } 1}$$

*

4. On note $U$ une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{U}([0;1[)$ et on suppose que $X$ et $U$ sont indépendantes, calculer une densité de $X+U$.

RÉPONSE:

On note $g$ la densité usuelle de $U$.
D'après le cours une densité $h$ de $Z = X+U$ est donnée, sous réserve de convergence, par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = f \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = \int_{x-1}^{x} \frac{1}{2(1+|t|)^2}\,\mathrm{d}t$$

Une étude du support de $t \mapsto g(x-t)$ ou de son graphe fait apparaître trois cas en fonction de la position du point de rupture $t=0$ par rapport aux points $t = x-1$ et $t = x$.

**Cas** $x < 0$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x} \frac{1}{(1+|t|)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x} \frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_{x-1}^{x} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}\right) \end{aligned}$$

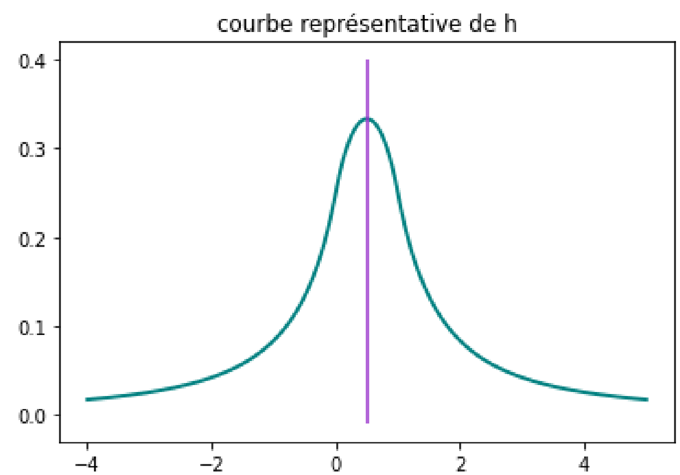
**Cas** $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x} \frac{1}{(1+|t|)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{0} \frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{x} \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_{x-1}^{0} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t}\right]_{0}^{x} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-0} - \frac{1}{2-x}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2-x} - \frac{1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

**Cas** $1 \leqslant x$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x} \frac{1}{(1+|t|)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x} \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+t}\right]_{x-1}^{x} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel } h(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{2-x} & \text{si } x < 0 \\ 2 - \dfrac{1}{2-x} - \dfrac{1}{x+1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$




On remarque une symétrie par rapport à la droite verticale $x = 1/2$, elle est due à la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(1-x) = h(x)$$

*

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
"densité de X"
        return 1/(2*(1+abs(x))**2)

def h(x):
""" densité de U+Z"""
        if x<0:
                z=(1/(1-x)-1/(2-x))
        elif 0<=x<=1:
                z= 2 -1/(2-x) -1/(x+1)
        else:
                z=1/x-1/(x+1)
        return z/2
h_vect=np.vectorize(h)
#%%
x=np.arange(-0.75,0.75,0.001)
y=f(x)
plt.plot(x,y,color='teal',linewidth=2)
plt.axis("equal")
plt.title('courbe représentative de f')
plt.show()

#%%
x=np.arange(-4,5,0.001)
y=h_vect(x)
plt.plot(x,y,color='teal',linewidth=2)
plt.vlines(x=0.5,ymin=-0.01,ymax=0.4,color='darkorchid')
plt.title('courbe représentative de h')
plt.show()
```