EXERCICES d'ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI2 2023-2024

Structure d'espace vectoriel. Familles libres.

1. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre de vecteurs dans un espace vectoriel E, soit a un vecteur de E n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. Montrer que la famille $(e_1 + a, \cdots, e_p + a)$ est libre.

2. Soient a_1, $\cdots$, a_n des réels distincts, soit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la fonction $f_i : x \mapsto |x - a_i|$. Montrer que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3*. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E, soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$, soit G un supplémentaire de F dans E. Pour tout vecteur a de G, on pose $F_a = \mathrm{Vect}(e_1 + a, \cdots, e_p + a)$.

a. Montrer que G est un supplémentaire de F_a dans E.

b. Montrer que $F_a = F_b$ si et seulement si $a = b$.

Espaces vectoriels de dimension finie.

4. Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension n.

a. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

b. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) + \dim(H) > 2n$. Montrer que $F \cap G \cap H \neq \{0\}$.

Applications linéaires.

5. Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. On suppose que p et q commutent ($p \circ q = q \circ p$). Montrer que $f = p \circ q$ et $g = p + q - p \circ q$ sont des projecteurs de E, déterminer leur image et leur noyau en fonction des images et noyaux de p et q. *On pourra éventuellement noter que* $\mathrm{id}_E - g = (\mathrm{id}_E - p) \circ (\mathrm{id}_E - q)$.

6. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E vérifiant la relation $u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E = 0$. Démontrer la relation

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)\ .$$

7. Soient a et b deux réels distincts, soient f, p, q trois endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E vérifiant les relations

$$\left\{\begin{array}{rl} p + q &= \mathrm{id}_E \\ a\ p + b\ q &= f \\ a^2\ p + b^2\ q &= f^2 \end{array}\right. .$$

a. Vérifier la relation $(f - a\ \mathrm{id}_E) \circ (f - b\ \mathrm{id}_E) = 0$.

b. Montrer que p et q sont des projecteurs associés, i.e. $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$.

c. Montrer que $f^m = a^m\, p + b^m\, q$ pour tout entier naturel m.

8. Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et F un sous-espace vectoriel de E.

a. Exprimer $u^{-1}\big(u(F)\big)$ en fonction de F et de $\mathrm{Ker}\, u$.

b. Exprimer $u\big(u^{-1}(F)\big)$ en fonction de F et de $\mathrm{Im}\, u$.

9. Soient f, g, h des endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que

$$f \circ g = h\ , \quad g \circ h = f \quad \text{et} \quad h \circ f = g\ .$$

a. Montrer que f, g, h ont même noyau et même image.

b. Montrer que $f^2 = g^2 = h^2$, puis que $f^5 = f$.

c. En déduire que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

Applications linéaires en dimension finie.

10. Soit n un entier au moins égal à 2, soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par

$$\Phi\ :\ P \mapsto Q \quad \text{tel que} \quad Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2\,P(X)\ .$$

Déterminer le degré du polynôme $Q_k = \Phi(X^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. En déduire l'image de Φ. Déterminer le noyau de Φ.

11. Noyaux itérés d'un endomorphisme. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit u un endomorphisme de E. Pour tout entier naturel k, on note $n_k = \dim(\operatorname{Ker} u^k)$.

a. Montrer que la suite (n_k) est croissante.

b. On pose $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n_{k+1} = n_k\}$. Justifier l'existence d'un tel entier p.

c. Montrer que $n_k = n_p$ pour tout entier k supérieur à p.

d. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im} u^p$.

12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme **nilpotent** (il existe un entier naturel k tel que $u^k = 0$).

a. Soit x un vecteur de E. Soit q le plus petit entier naturel tel que $u^q(x) = 0_E$ (*justifier son existence*). Montrer que la famille $\big(x, u(x), \cdots, u^{q-1}(x)\big)$ est libre. En déduire que $u^n = 0$.

b. On suppose de plus $u^{n-1} \neq 0$ (*justifier l'existence de tels endomorphismes*). Montrer que l'endomorphisme u n'admet pas de racine carrée (c'est-à-dire il n'existe pas d'endomorphisme f de E tel que $f^2 = u$).

13. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On considère les quatre assertions suivantes:

(1) : $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$

(2) : $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f)$

(3) : $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$

(4) : $\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f) = E$.

a. Montrer que $(\mathbf{1}) \iff (\mathbf{3})$ et $(\mathbf{2}) \iff (\mathbf{4})$.

b. Montrer que les quatre assertions sont équivalentes si E est de dimension finie.

c. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

14. Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose que $u + v = \mathrm{id}_E$ et $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leq n$. Montrer que u et v sont des projecteurs.

15. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E, vérifiant $f \circ g = \mathrm{id}_E$.

a. Montrer que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g)$.

b. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$.

c. Dans quel cas peut-on conclure que $g = f^{-1}$?

d. Que dire de l'endomorphisme $g \circ f$?

16. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.

a. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\left\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\right\}$.

b. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \geq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(E)$. *Considérer l'application linéaire* $u = g\Big|_{\mathrm{Im}(f)}$.

c. Soient $f_1, \cdots, f_m$ des endomorphismes de E. Montrer que

$$\dim\left(\mathrm{Ker}(f_1 \circ \cdots \circ f_m)\right) \leq \sum_{k=1}^{m} \dim\left(\mathrm{Ker}\, f_k\right) .$$

17. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. On suppose que $f \circ g = 0$ et que $f + g$ est un automorphisme de l'espace vectoriel E. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g) = E .$$

18. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

a. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g) \iff E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g)$.

b. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0_E\}$.

Calcul matriciel.

19. Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. Les lettres i, j, k, l représenteront des entiers de l'intervalle $[\![1, n]\!]$. On note E_i (avec un seul indice) le i-ème vecteur de la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, i.e. $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le coefficient 1 étant placé à la position i. On note $E_{i,j}$ (avec deux indices) la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient en position (i, j) vaut 1, les autres étant nuls, $E_{i,j}$ est appelée **matrice élémentaire**.

a. Effectuer les produits $E_i^\top E_j$, $E_i E_j^\top$ et $E_{i,j} E_{k,l}$. *On pourra utiliser le symbole de Kronecker* $\delta_{i,j}$ *qui vaut 1 si* $i = j$ *et 0 sinon.*

b. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Que représentent les produits $E_i^\top A$, AE_j et $E_i^\top AE_j$?

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Montrer que A est une **matrice scalaire**, i.e. de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

d. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A commute avec toute matrice inversible:

$$\forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad AM = MA .$$

Montrer que A est une matrice scalaire.

20. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et que cet ensemble est stable par le produit matriciel. Montrer que, si une matrice A de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est inversible, alors son inverse A^{-1} appartient aussi à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. *Pour cette dernière question, on pourra considérer l'application* $\varphi : M \mapsto AM$.

21. Théorème d'Hadamard. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **à diagonale strictement dominante**, c'est-à-dire telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \ .$$

Supposons qu'il existe un vecteur **non nul** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$, soit $s \in [\![1, n]\!]$ un indice tel que $|x_s| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. En considérant la s-ième coordonnée du vecteur AX, obtenir une contradiction. En déduire que la matrice A est inversible.

22. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$. Quelle inégalité peut-on obtenir concernant le rang de u ? Si $\mathrm{rg}\, u = r$ ($r \neq 0$), montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est $M = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

23. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$, $B = X^4 - X$. On considère l'application φ de E dans E qui, à tout polynôme P, associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

a. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

b. Écrire la matrice de φ relativement à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

c. Déterminer $\mathrm{Ker}\, \varphi$.

d. Montrer que $\mathrm{Im}\, \varphi = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.

24. Inverser les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & & & (1) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Sommes de sous-espaces vectoriels.

25. Soient $E_1, \cdots, E_m$ et $F_1, \cdots, F_m$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} E_i = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} F_i$ et que $E_i \subset F_i$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. Montrer que $E_i = F_i$ pour tout i.

26. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient $p_1, \cdots, p_m$ des endomorphismes de E vérifiant les relations

$$p_i \circ p_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = \mathrm{id}_E \ .$$

Montrer que $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\, p_i$. Interpréter géométriquement les p_i.

Sous-espaces stables.

27. Soit p un projecteur dans un espace vectoriel E, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f et p commutent si et seulement si $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par f.

28. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On pose

$$N = \bigcup_{p=0}^{+\infty} \mathrm{Ker}(u^p) \quad \text{et} \quad I = \bigcap_{p=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u^p) .$$

a. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \mathrm{Ker}(u^n)$ et $I = \mathrm{Im}(u^n)$.

b. Établir que N et I sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par u, et que les endomorphismes induits u_N et u_I sont respectivement nilpotent et bijectif.

c. Réciproquement on suppose $E = F \oplus G$, avec F et G sous-espaces vectoriels stables par u tels que les endomorphismes induits u_F et u_G soient respectivement nilpotent et bijectif. Établir $F = N$ et $G = I$.

Matrices par blocs.

29*. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, soient V un sous-espace vectoriel de E et W un sous-espace vectoriel de F. Montrer que l'ensemble

$$X = \Big\{ f \in \mathcal{L}(E,F) \mid V \subset \mathrm{Ker}\, f \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\, f \subset W \Big\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ et préciser sa dimension.

30. Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de M en fonction de celui de D.

31*. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$, avec $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) \iff D = CA^{-1}B .$$

32. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer l'équivalence entre

(a) : $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$

(b) : il existe $r \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{B}$ base de E et $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ tels que $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Trace.

33.a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe une matrice-colonne $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice-ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que $M = CL$. Réciproque ?

b. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit u un endomorphisme de E, de rang 1. Démontrer la relation $u \circ u = \mathrm{tr}(u) \cdot u$

34. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AM$. Exprimer $\mathrm{tr}(\varphi)$ en fonction de $\mathrm{tr}(A)$.

35. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Discuter et résoudre l'équation $M = \mathrm{tr}(M)\,A + B$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Matrices semblables.

36.a. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit u un endomorphisme de E commutant avec tous les automorphismes de E :

$$\forall s \in \mathrm{GL}(E) \qquad s \circ u = u \circ s\ .$$

En utilisant des symétries vectorielles, montrer que, pour tout vecteur x de E, les vecteurs x et $u(x)$ sont colinéaires. En déduire que u est une homothétie.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que la seule matrice semblable à A soit la matrice A elle-même (on a $P^{-1}AP = A$ pour toute matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$). Montrer que A est une **matrice scalaire** ($A = \lambda I_n$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$).

37. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 14 & -12 & 10 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{E} = \Big\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\Big\}$.

38. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^{n-1} \neq 0_n$ et $A^n = 0_n$.

Montrer que A est semblable à la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

39*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls. *On pourra raisonner par récurrence sur n*

40. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^2 = 0_n$ et $\mathrm{rg}(A) = k$. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Formes linéaires et hyperplans.

41. Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit F un sous-espace de dimension p avec $p < n$. Montrer que l'on peut écrire F comme une intersection de $n - p$ hyperplans de E. Est-il possible d'écrire F comme une intersection de k hyperplans de E avec $k < n - p$?

42. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\mathrm{tr}(AE_{i,j})$, où $E_{i,j}$ est une matrice élémentaire (tous les coefficients nuls sauf celui en position (i,j) qui vaut 1). Montrer que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de la forme $\tau_A : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$, où A est une matrice fixée. *On montrera pour cela que l'application $A \mapsto \tau_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big)$.*

43. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ et une forme linéaire φ sur E tels que

$$\forall x \in E \qquad u(x) = \varphi(x)\, a\ .$$

44.a. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (A,B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)^2 \qquad \varphi(AB) = \varphi(BA)\ .$$

Montrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda\,\mathrm{tr}$.

b. Soit f un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $f(I_n) = I_n$ et

$$\forall (A,B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)^2 \qquad f(AB) = f(BA)\ .$$

Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{tr}\big(f(M)\big) = \mathrm{tr}(M)$.

45*.a. Soient $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ et ψ des formes linéaires sur un espace vectoriel E quelconque. Prouver l'équivalence

$$\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \iff \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \subset \mathrm{Ker}(\psi)\ .$$

On pourra considérer $\Phi : E \to \mathbb{K}^{n+1}$, $x \mapsto \Phi(x) = \big(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \psi(x)\big)$.

b. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, soit $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ une famille finie de formes linéaires sur E de rang r, montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_0 = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ de E est de dimension $p - r$ (*on pourra procéder par récurrence sur n*):

$$\dim\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k)\Big) = \dim(E) - \mathrm{rg}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)\ .$$

46.a. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe une matrice élémentaire $E_{i,j}$, avec $i \neq j$, telle que $\varphi(E_{i,j}) \neq 0$. Montrer qu'il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi(I_n + \alpha E_{i,j}) = 0$.

b. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient au moins une matrice inversible.

Polynômes d'endomorphismes et de matrices.

47. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier $A^2 - 4A - 5I_3 = 0$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 4X - 5$.

En déduire A^n pour n entier naturel, ainsi que A^{-1}.

48. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe un polynôme P non constant tel que $P(0) \neq 0$, vérifiant $AB = P(A)$. Montrer que la matrice A est inversible. Montrer que les matrices A et B commutent.

49. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit u un endomorphisme de E. On suppose que u admet un polynôme annulateur P tel que $P(X) = X\,Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$

50. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exprimer simplement $P(aI_n + J)$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.

51. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $f(M) = M + \operatorname{tr}(M)\,I_n$ pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Déterminer le noyau de f, son rang. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

c. Prouver la relation $f^2 - (n+2)\,f + (n+1)\,\mathrm{id} = 0$.

d. Déterminer la réciproque f^{-1} de f.

52. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, soit $A = I_n + N$. On admettra que $N^n = 0_n$.

a. Montrer que $t \mapsto \sqrt{1+t}$ admet un développement limité à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0, on le notera

$$\sqrt{1+t} = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + o(t^{n-1}) \; .$$

b. Soit le polynôme $R = 1 + X - (a_0 + a_1 X + a_{n-1} X^{n-1})^2$. Montrer que le polynôme R est divisible par X^n, c'est-à-dire que l'on peut écrire $R(X) = X^n\,Q(X)$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme.

c. En déduire qu'il existe au moins une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

d. Chercher une telle matrice M lorque $n = 3$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.