

**Suites et séries numériques + ensembles dénombrables**

*cf.* programme précédent

**Algèbre linéaire**

Structure d'espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), sous-espaces vectoriels.

Somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe, supplémentaires.

Familles libres (finies), génératrices, bases, coordonnées d'un vecteur dans une base.

Espaces vectoriels de dimension finie: théorème de la base incomplète, définition de la dimension, cardinal d'une famille libre ou génératrice. Rang d'une famille de vecteurs. Dimension d'un sous-espace, formule de Grassmann.

Applications linéaires, image, noyau. Endo-, iso- et automorphismes. Projecteurs et symétries. En dimension finie, notion de rang, théorème du rang.

Produit cartésien d'un nombre fini d'espaces vectoriels. Dimension lorsqu'ils sont tous de dimension finie.

Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, somme directe.

En dimension finie : caractérisation des sommes directes par la dimension, base adaptée à une décomposition de  $E$  en somme directe, base adaptée à un sous-espace.

Notion d'équation linéaire.

---

**Démonstrations de cours ou proches du cours**

- L'ensemble  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  (ou  $[0, 1[$ ) n'est pas dénombrable.
- Si  $E$  et  $F$  sont dénombrables, alors  $E \times F$  est dénombrable.
- Énoncé et preuve de la règle de d'Alembert.
- Développement asymptotique  $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ .
- La convergence absolue entraîne la convergence.
- Énoncé et preuve du théorème spécial des séries alternées.
- La série exponentielle.
- L'ensemble des suites complexes  $u = (u_n)$  vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0$  est un plan vectoriel de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  ( $a, b, c$  complexes avec  $a$  et  $c$  non nuls).
- Caractérisation des projecteurs (ou des symétries).
- En dimension finie,  $\dim \left( \sum_{i=1}^m E_i \right) \leq \sum_{i=1}^m \dim(E_i)$ , égalité si et seulement si la somme est directe.